Proceso de selección 2023

LICENCIATURA EN ACTUARÍA

SESIÓN 4

Probabilidad

PROBABILIDAD

Objetivo

- El alumno identificará los diferentes enfoques de la probabilidad y su interpretación para la toma de decisiones.

Introducción

- La probabilidad es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados.
- La probabilidad siempre es un número entre 0 y 1.
- Es frecuente expresarla en porcentaje.

Enfoque teórico o clásico

- Se parte de la base de que se conocen todos los resultado posibles y a cada uno de ellos se les asigna una probabilidad de manera directa sin hacer experimento o medición alguna.

La probabilidad como frecuencia relativa

- Para asignarle probabilidad a un suceso se experimenta antes, y a partir de los resultados se determinan las frecuencias con que acurren los diferentes resultados.
- Las compañías de seguros desarrollan tablas de mortalidad de las personas para diferentes edades y circunstancias.

Interpretación subjetiva de la probabilidad

- La probabilidad subjetiva es una cuestión de opinión. Dos personas pueden asignar diferentes probabilidades a un mismo evento, aun cuando tengan la misma información

Conceptos básicos

- Experimento: Es aquel proceso que da lugar a una medición o a una observación.
- Experimento aleatorio: Es aquel experimento cuyo resultado es producto de la suerte o el azar.
- Evento: El resultado de un experimento.
- Evento aleatorio: Resultado de un experimento aleatorio. Para referirnos a los eventos aleatorios se usan letras mayúsculas.

Conceptos básicos

- Eventos simples: Son eventos que ya no pueden descomponerse en otros mas sencillos.
- Eventos compuestos: Incluyen varias posibilidades por lo que pueden descomponerse en eventos sencillos.
- Espacio muestral: Es el conjunto de todos los resultados posibles, en función de nuestra perspectiva del experimento aleatorio

- Considere el primer experimento de lanzar una moneda. La cara de la moneda que caiga hacia arriba —cara o cruz— determina el resultado experimental (puntos muestrales). Si denota con S el espacio muestral, puede emplear la notación siguiente para describir el espacio muestral.

$$S = \{\text{Cara, cruz}\}$$

$$S = \{\text{Defectuosa, no defectuosa}\}$$

REGLAS DE CONTEO, COMBINACIONES Y PERMUTACIONES

- Al asignar probabilidades es necesario saber identificar y contar los resultados experimentales. A continuación tres reglas de conteo que son muy utilizadas.
- **Experimentos de pasos múltiples.** La primera regla de conteo sirve para experimentos de pasos múltiples.
- El experimento de lanzar dos monedas es un experimento de dos pasos: el paso 1 es lanzar la primera moneda y el paso 2 es lanzar la segunda moneda

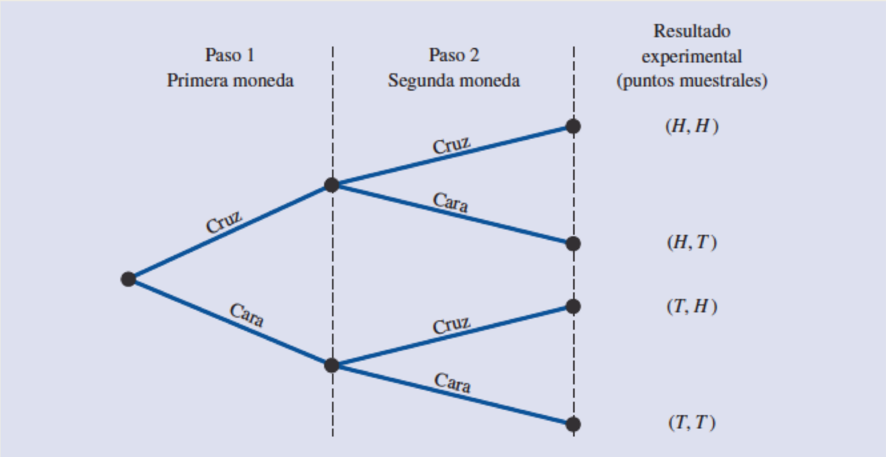
$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

REGLA DE CONTEO PARA EXPERIMENTOS DE PASOS MÚLTIPLES

Un experimento se describe como una sucesión de k pasos en los que hay n_1 resultados posibles en el primer paso, n_2 resultados posibles en el segundo paso y así en lo sucesivo, entonces el número total de resultados experimentales es $(n_1)(n_2) \ldots (n_k)$.

- Si considera el experimento del lanzamiento de dos monedas como la sucesión de lanzar primero una moneda ($n1=2$) y después lanzar la otra ($n2=2$), siguiendo la regla de conteo (2)(2)=4, entonces hay cuatro resultados distintos. Como ya se mostró, estos resultados son $S \ \{(H , H), (H , T), (T , H), (T , T)\}$. El número de resultados experimentales de seis monedas es (2)(2)(2)(2)(2)(2)=64.

Diagrama de árbol



Combinaciones

- Otra regla de conteo útil le permite contar el número de resultados experimentales cuando el experimento consiste en seleccionar n objetos de un conjunto (usualmente mayor) de N objetos. Ésta es la regla de conteo para combinaciones.

Combinaciones

REGLA DE CONTEO PARA COMBINACIONES

El número de combinaciones de N objetos tomados de n en n es

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

donde

$$N! = N(N-1)(N-2)\cdots(2)(1)$$
$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$$

y por definición, $0! = 1$

Combinaciones

- Como ejemplo del uso de la regla de conteo para combinaciones, considere un procedimiento de control de calidad en el que un inspector selecciona al azar dos de cinco piezas para probar que no tengan defectos. En un conjunto de cinco partes, ¿cuántas combinaciones de dos partes pueden seleccionarse? De acuerdo con la regla de conteo es claro que con $N = 5$ y $n = 2$ se tiene:

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = \frac{120}{12} = 10$$

- Para ver otro ejemplo, considere la lotería de Florida en la que se seleccionan seis números de un conjunto de 53 números para determinar al ganador de la semana. Para establecer las distintas variables en la selección de seis enteros de un conjunto de 53, se usa la regla de conteo para combinaciones.

$$\binom{53}{6} = \frac{53!}{6!(53-6)!} = \frac{53!}{6!47!} = \frac{(53)(52)(51)(50)(49)(48)}{(6)(5)(4)(3)(2)(1)} = 22\,957\,480$$

Permutaciones

- Permutaciones La tercera regla de conteo que suele ser útil, es para permutaciones. Dicha regla permite calcular el número de resultados experimentales cuando se seleccionan n objetos de un conjunto de N objetos y el orden de selección es relevante. Los mismos n objetos seleccionados en orden diferente se consideran un resultado experimental diferente.

REGLA DE CONTEO PARA PERMUTACIONES

El número de permutaciones de N objetos tomados de n en n está dado por

$$P_n^N = n!\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

- Para ver un ejemplo, reconsidere el proceso de control de calidad en el que un inspector selecciona dos de cinco piezas para probar que no tienen defectos. ¿Cuántas permutaciones puede seleccionar? La ecuación indica que si $N = 5$ y $n = 2$, se tiene:

$$P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)} = \frac{120}{6} = 20$$

Asignación de probabilidades

Considere, por ejemplo un estudio sobre los tiempos de espera en el departamento de rayos x de un hospital pequeño. Durante 20 días sucesivos un empleado registra el número de personas que están esperando el servicio a las 9:00 a.m.; los resultados son los siguientes.

Número de personas que esperan	Número de días: resultados de ocurrencia
0	2
1	5
2	6
3	4
4	3
Total	20

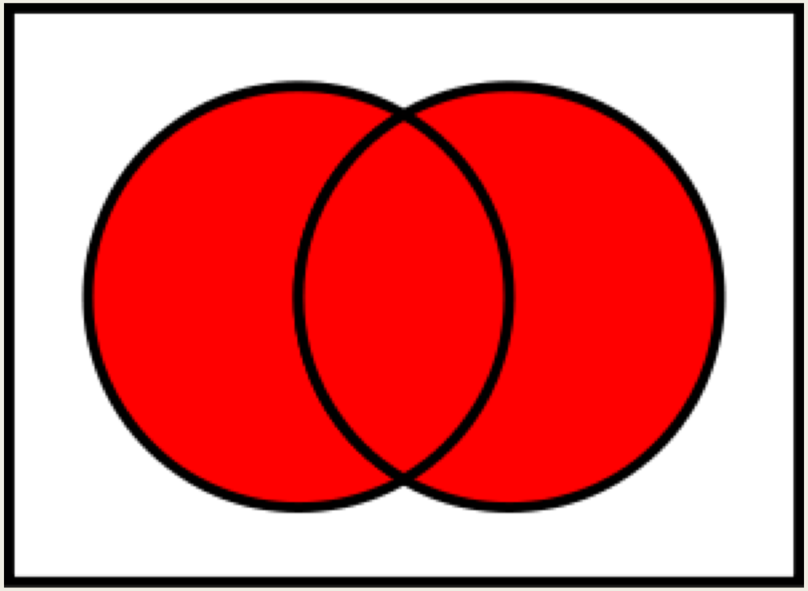
Asignación de probabilidades

- Con el método de la frecuencia relativa, la probabilidad que se le asignará al resultado experimental cero pacientes esperan el servicio, será 2/20 = 0.10; al resultado experimental un paciente espera el servicio, 5/20 = 0.25; 6/20 = 0.30 a dos pacientes esperan el servicio; 4/20 = 0.20 a tres pacientes esperan el servicio y 3/20 = 0.15 a cuatro pacientes esperan el servicio.

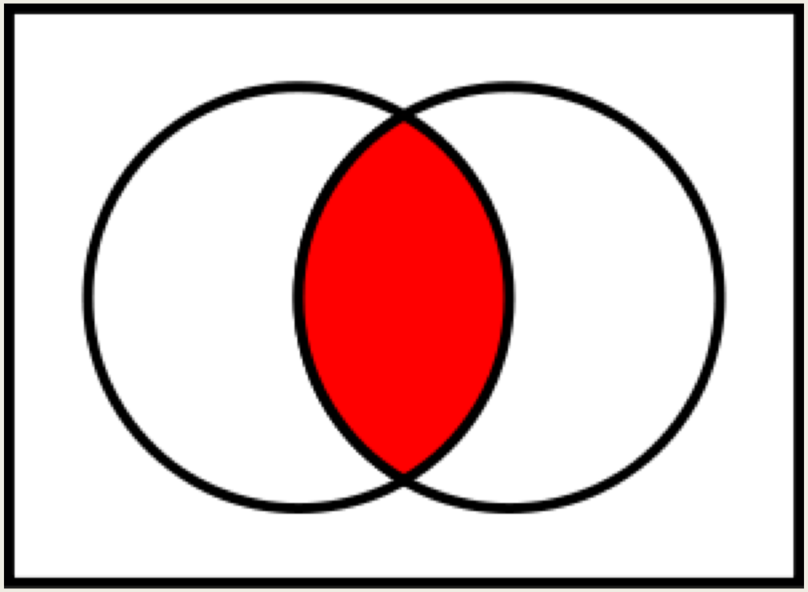
Operaciones Lógicas

Operación Lógica	Operación en conjuntos
o	Unión (U)
y	Intersección (∩)
no	Complemento (‘) Diferencia (-)

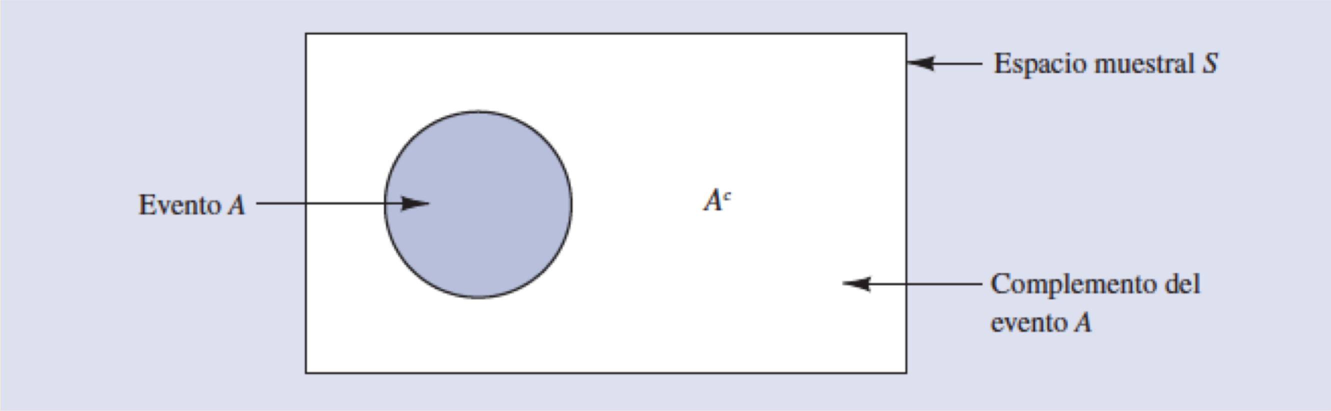
Unión



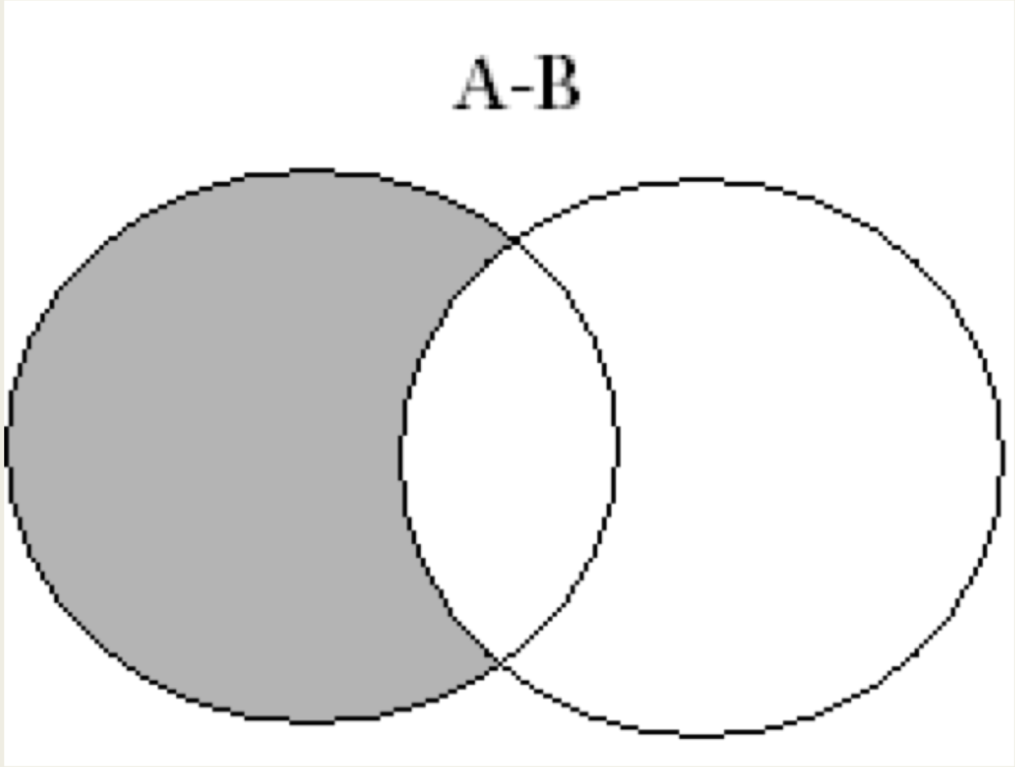
Intersección



Complemento



Diferencia



Ejemplos

- En un grupo de egresados de una universidad tenemos los siguientes eventos: Evento C a egresados de contaduría, evento A a egresados de administración, evento I a egresados de informática, evento M a las mujeres y evento H a los hombres y tenemos interés en conocer las siguientes probabilidades:

- P(C)
- P (A U C)
- P (A^c)
- P (M n I)
- P (H - A^c)

Axiomas de probabilidad

1) Para todo evento A, $P(A) \geq 0$
2) Si Ω representa el evento universo, entonces $P(\Omega) = 1$
3) Dados dos eventos A y B, ocurre que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Axiomas de probabilidad

A partir de los axiomas anteriores se obtienen otros resultados interesantes:

- *P(□) = 0, donde □ representa un conjunto vacío.*
- *Si Ω es el evento universo, entonces para todo evento A existe un evento complemento constituido por aquellos resultados del espacio muestral que no están en A, con la propiedad de que*

$$A \text{ U } A^c = \Omega \text{ por lo que } P(A \text{ U } A^c) = P(\Omega) \text{ de modo que}$$

$$P(A \text{ U } A^c) = 1$$

Axiomas de probabilidad

Sin embargo $P(A \cap A^c) = P(\square)$ y de acuerdo con lo visto anteriormente esta probabilidad es de 0. Por lo tanto

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

Donde al despejar queda:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Ejemplo

En un experimento aleatorio que consiste en arrojar dos dados y sea Ω el espacio muestral que contiene todos los resultados posibles de sumar los puntos obtenidos. Se definen además los eventos de A como el hecho de que el tiro sume menos de cuatro y B como el hecho de que la suma sea un numero par. Se desean determinar la probabilidades siguientes:

a) $P(A^c)$
b) $P(B)$
c) $P(A \cup B)$

Probabilidad Simple o Marginal

- En un experimento cualquiera, la probabilidad simple de un evento es la que tiene este, sin considerar las conexiones que pueda tener con otros eventos.

Probabilidad Simple o Marginal

- El procedimiento para calcular la probabilidad marginal es:
  1. *Definimos el experimento*
  2. *Hacemos la lista de todos los eventos simples asociados con el experimento que se definió*
  3. *Asignamos probabilidades a cada uno de los puntos muestrales*
  4. *Definimos el evento que nos interesa como un conjunto de puntos muestrales*
  5. *Encontramos la probabilidad del evento que interesa sumando la probabilidad de los puntos muestrales.*

Probabilidad condicional

- Dado dos eventos podemos preguntarnos por la probabilidad de uno de ellos bajo el supuesto de que uno ya ocurrió

La probabilidad condicional de que ocurra el evento B dado que otro evento A ya ocurrió es:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo

Tenemos el evento A que es: Amanece nublado en una región X

De acuerdo con información meteorológica recopilada a lo largo de varios días se sabe que:

- *Amanece nublado y llueve el 40% de los días*
- *Amanece nublado y no llueve 20% de los días*
- *Amanece despejado y llueve el 10% de los días*
- *Amanece despejado y no llueve el 30% de los dias*

- La probabilidad de que llueva en la tarde dado que amaneció nublado.
- La probabilidad de que llueva en la tarde dado que amaneció despejado.

C= Amanece despejado

B= Lluvia

$$P(^B/_A) = \frac{0.40}{0.60} 66.7\%$$

A= 60%

(A ∩ B)= 40%

$$P(B/C) = \frac{0.10}{040} = 0.25 \; o \; 25\%$$

P(C)=40%