FACULTAD DE
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

FCA

RELACIONES Y FUNCIONES

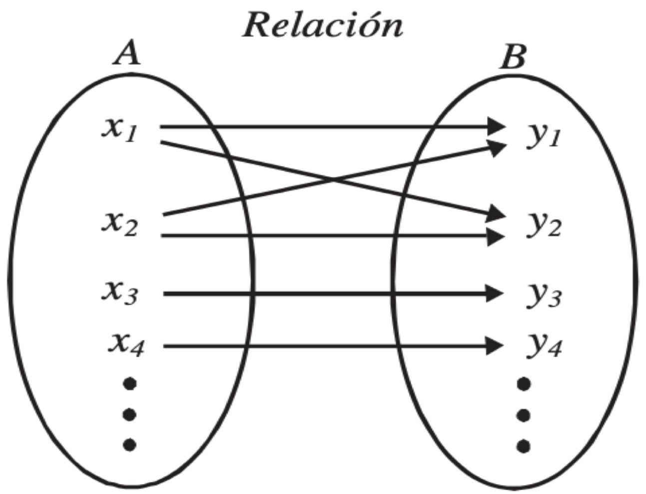
SESIÓN 1

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

RELACIONES

Regla de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos.

Ejemplo



Esta relación se representa con el siguiente conjunto de pares ordenados

$$R = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\ldots\}$$

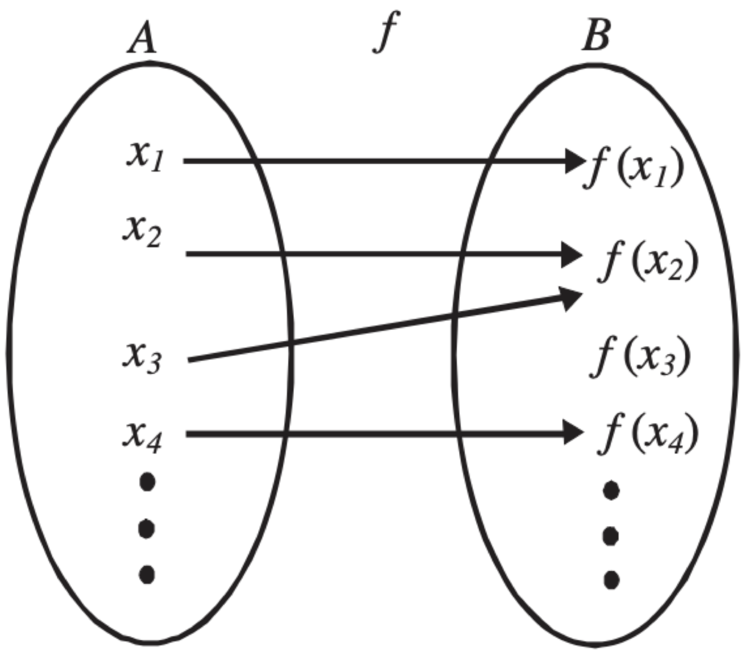
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Función

El concepto de función es uno de los más importantes en el mundo de las matemáticas. Las funciones no sólo representan fórmulas, o lugares geométricos, también se utilizan como modelos matemáticos que resuelven problemas de la vida real.

A continuación se dan algunas definiciones de función:

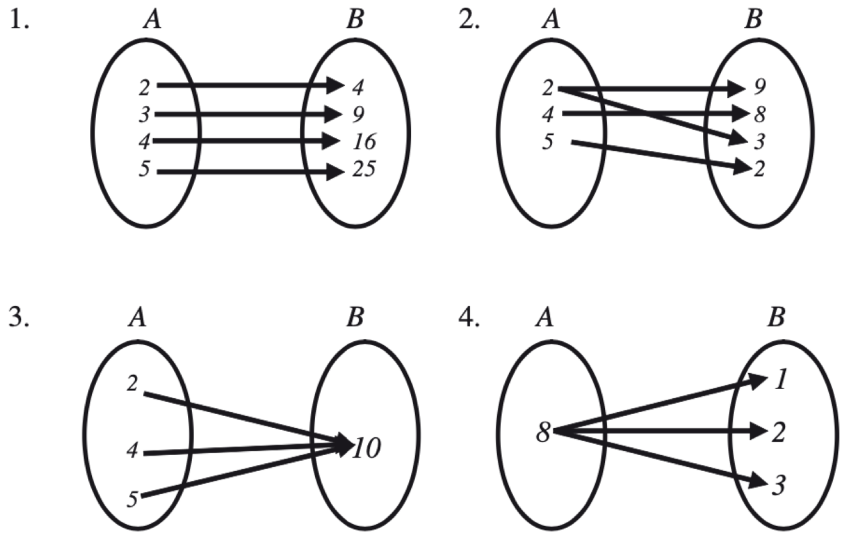
- Es una regla de correspondencia que asocia a los elementos de dos conjuntos. La cual a cada elemento del primer conjunto (dominio) le asocia un solo elemento del segundo conjunto (contradominio).
- Sean A y B dos conjuntos y f una regla que a cada $x \in A$ asigna un único elemento $f(x)$ del conjunto B, se dice que f es una función que va del conjunto A al B, y se representa de la siguiente forma: $f: A \rightarrow B$, donde al conjunto A se le llama dominio y al B contradominio, que también se representa por medio de un diagrama de flechas:



- Una función es una colección de pares ordenados con la siguiente propiedad: Si (a, b) y (a, c) pertenecen a una colección, entonces se cumple que $b = c$; es decir, en una función no puede haber dos pares con el mismo primer elemento.

EJERCICIO 1

Determina si los siguientes diagramas representan una función o una relación:



Solución

El primer y el tercer diagramas corresponden a una función ya que a cada elemento del conjunto *A* se le asigna un solo elemento del conjunto *B*.

En el segundo diagrama al menos a un elemento del conjunto *A* se le asignan dos elementos del conjunto *B*, mientras que en el cuarto diagrama el elemento 8 se asocia con tres elementos del conjunto *B*, por tanto, se concluye que estos conjuntos representan una relación.

EJERCICIO 2

Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados corresponden a una función o a una relación:

$$A = \{(-2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

$$B = \{(3, 2), (3, 6), (5, 7), (5, 8)\}$$

$$C = \{(2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

$$M = \{(2, 4), (6, 2), (7, 3), (4, 12), (2, 6)\}$$

Solución

Los conjuntos A y C son funciones ya que el primer elemento de cada par ordenado no se repite. En el conjunto B el 3 y el 5 aparecen dos veces como primer elemento del par ordenado mientras que en el conjunto M al 2 se le están asignando el 4 y el 6 como segundo elemento, por tanto, B y M son relaciones.

Las funciones y relaciones pueden tener una representación gráfica en el plano cartesiano. Para distinguir si se trata de una función o una relación basta con trazar una recta paralela al eje “Y” sobre la gráfica; si ésta interseca en dos o más puntos es una relación, si sólo interseca un punto será una función.

EJERCICIO 3

Determina si los siguientes conjuntos de pares ordenados corresponden a una función o a una relación:

$$A = \{(-2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$$

$$B = \{(3, 2), (3, 6), (5, 7), (5, 8)\}$$

$$C = \{(2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

$$M = \{(2, 4), (6, 2), (7, 3), (4, 12), (2, 6)\}$$

Solución

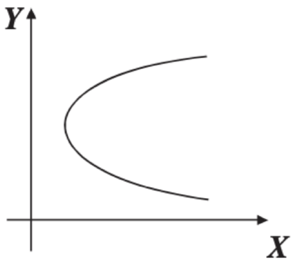
Los conjuntos A y C son funciones ya que el primer elemento de cada par ordenado no se repite. En el conjunto B el 3 y el 5 aparecen dos veces como primer elemento del par ordenado mientras que en el conjunto M al 2 se le están asignando el 4 y el 6 como segundo elemento, por tanto, B y M son relaciones.

Las funciones y relaciones pueden tener una representación gráfica en el plano cartesiano. Para distinguir si se trata de una función o una relación basta con trazar una recta paralela al eje "Y" sobre la gráfica; si ésta interseca en dos o más puntos es una relación, si sólo interseca un punto será una función.

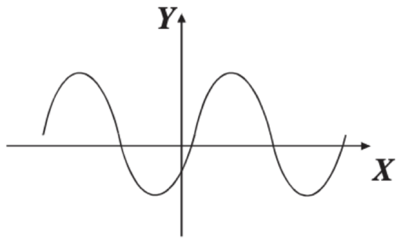
Notación y clasificación

3 Determina si las siguientes gráficas representan una relación o una función.

1.



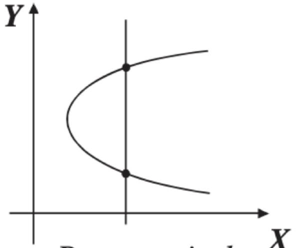
2.



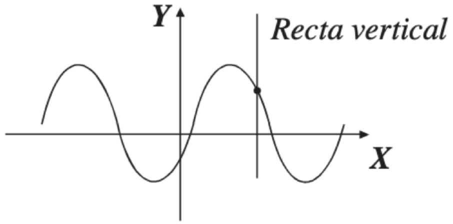
Solución

Se traza una recta vertical en ambas gráficas y se observa que en la primera interseca en dos puntos a la gráfica, por tanto, representa una relación y en la segunda, la recta vertical interseca en un punto a la gráfica, por consiguiente representa una función.

1.



2.



Ejemplos

Algebraicas

$f(x) = x^3 - 4x$ $\quad f(x) = \sqrt{x-4}$ $\quad y = |x|$

$y = 3x^2 - 5x - 6$ $\quad g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ $\quad g(x) = |x-2| - 1$

Trascendentes

$f(x) = \cos x$ $\quad f(x) = e^{4x}$ $\quad s(t) = \ln(2t-4)$

$f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ $\quad y = e^{\sqrt{x}} + 2$ $\quad g(x) = \log(x+1)$

Las funciones algebraicas y trascendentes pueden ser:

- **Explícitas**
  Es cuando la función está en términos de una variable, por ejemplo:

$y = x^2$ $\quad f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ $\quad y = \operatorname{sen} 3x$ $\quad s(t) = e^t$ $\quad y = \log x$

$y = x^3 - 1$ $\quad g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $\quad f(x) = \cos \dfrac{1}{2} x$ $\quad g(x) = 2^{x+3}$ $\quad f(x) = \ln(3x)$

- **Implícitas**
  Es cuando ambas variables forman parte de la ecuación, por ejemplo:

$x^2 - 8y + 16 = 0$ $\quad x^3 + y^2 - 3x = 0$ $\quad \operatorname{sen} x + \cos y = 1$ $\quad e^y = x + 3$

Las funciones que se estudiarán en este libro siempre tomarán valores de números reales tanto para la variable independiente como para la dependiente.

Valor de una función

- El valor real $f(x)$ de una función es aquel que toma y cuando se asigna a x un determinado valor real.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 1

Obtén $f(-3)$ para $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

Solución

Para obtener $f(-3)$ se sustituye $x = -3$ en la función y se realizan las operaciones indicadas,

$$f(-3) = 3(-3)^2 - 5(-3) - 2 = 27 + 15 - 2 = 40$$

Por tanto $f(-3) = 40$, es decir $y = 40$ cuando $x = -3$ o lo que es lo mismo, la curva pasa por el punto $(-3, 40)$ en el plano cartesiano.

Ejemplo 2

Si $f(x) = \dfrac{3x-1}{5-x}$, encuentra $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{3}{4}$ en la función y se realizan las operaciones:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\left(\frac{3}{4}\right)-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{4}-1}{5-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{17}{4}} = \frac{5}{17}\text{, por tanto, cuando } x = \frac{3}{4},\ f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{17}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Ejemplo 3

Si $s(t) = \sqrt{t-5}$, determina $s(4)$, $s(a+5)$

Solución

$s(4) = \sqrt{4-5} = \sqrt{-1}$, la función no está definida para $t = 4$, $\sqrt{-1}$ no tiene solución real

$$s(a+5) = \sqrt{a+5-5} = \sqrt{a}$$

Ejemplo 4

Si $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, determina $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución

Se sustituye $x = \dfrac{\pi}{3}$, en $f(x)$ y se utiliza la identidad $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Ejemplo 5

Determina $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}$ si $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

Se obtiene que $f(a+b) = \sqrt{a+b}$ y $f(a) = \sqrt{a}$

Se sustituyen los valores obtenidos:

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{b} = \frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}$$

Un resultado equivalente se obtiene al racionalizar el numerador:

$$\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b}\cdot\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{a+b}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{b\cdot\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)} = \frac{b}{b\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$$

Finalmente, el resultado de $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b} = \dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 6

Si $y = \dfrac{x}{x+2}$, encuentra el valor de y cuando $x = -2$

Solución

Al evaluar la función en $x = -2$, se obtiene:

$$y = \frac{-2}{-2+2} = -\frac{2}{0}$$

La función no está definida para $x = -2$, ya que la división entre cero no está determinada.

Ejemplo 7

Si $f(x) = x^2 - 1$, demuestra que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{f(x)}{x^2}$

Demostración

Se sustituye $\frac{1}{x}$ en la función:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{x^2} = \frac{-\left(-1 + x^2\right)}{x^2} = -\frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Pero $x^2 - 1 = f(x)$

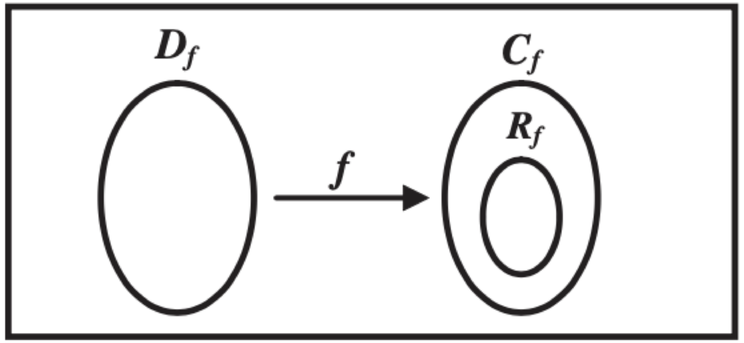
Por tanto, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{f(x)}{x^2}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Dominio, contradominio y rango de una función

Dada una función f: $A \rightarrow B$, se dice que el conjunto A es el **dominio** (D_f) y B el **contradominio** (C_f) o codominio de f. En términos del plano cartesiano, el dominio corresponde al conjunto formado por los valores posibles para X mientras que el contradominio corresponde a los valores posibles para Y.

- **Rango (R_f)**
  Valores del contradominio para los cuales $y = f(x)$, siendo $f(x)$ la imagen de x.



Ejemplos 1 y 2

¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$?

Solución

La función es polinomial, x puede tomar cualquier valor, por tanto, el dominio son todos los números reales, es decir $x \in R$ o dicho de otra forma $x \in (-\infty, \infty)$.

Determina el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

Solución

La función es racional y el denominador debe ser distinto de cero, ya que la división entre cero no está definida, por tanto, se busca el valor para el cual $x + 5 = 0$ obteniendo $x = -5$, entonces el dominio es: $D_f = \{x \in R \mid x \neq -5\}$ o bien $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Ejemplos 3 y 4

¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$?

Solución

La función es polinomial, x puede tomar cualquier valor, por tanto, el dominio son todos los números reales, es decir $x \in R$ o dicho de otra forma $x \in (-\infty, \infty)$.

Determina el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$

Solución

La función es racional y el denominador debe ser distinto de cero, ya que la división entre cero no está definida, por tanto, se busca el valor para el cual $x + 5 = 0$ obteniendo $x = -5$, entonces el dominio es: $D_f = \{x \in R \mid x \neq -5\}$ o bien $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, \infty)$.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplos 5 y 6

Encuentra el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Solución

Se plantea la desigualdad $x^2 - 16 \geq 0$, al resolverla se obtiene que el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \leq -4 \text{ o } x \geq 4\}$ o bien $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

Determina el dominio de la función $f(x) = \log(2x - 3)$

Solución

Para determinar el dominio de esta función se debe tomar en cuenta que $\log_b N = a$, para $N > 0$, por tanto, se plantea la desigualdad y se resuelve:

$$2x - 3 > 0 \quad \rightarrow \quad 2x > 3 \quad \rightarrow \quad x > \frac{3}{2}$$

Entonces, el dominio es el conjunto $D_f = \left\{x \in R \mid x > \frac{3}{2}\right\}$, o bien, $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Ejemplos 7 y 8

Encuentra el rango de la función $f(x) = \dfrac{6x+1}{1+3x}$

Solución

Se despeja x:

$$y = \frac{6x+1}{1+3x} \quad \rightarrow \quad y(1+3x) = 6x+1 \quad \rightarrow \quad y + 3xy = 6x + 1$$

$$3xy - 6x = 1 - y \quad \rightarrow \quad 3x(y-2) = 1 - y \quad \rightarrow \quad x = \frac{1-y}{3(y-2)}$$

El denominador se hace cero cuando $y = 2$, por tanto el rango es el conjunto:

$$R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o bien, } y \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

Determina el rango de la función $y = \sqrt{9 - x^2}$

Solución

$y \geq 0$, porque la raíz es positiva o cero, se despeja x:

$$y = \sqrt{9-x^2} \quad \rightarrow \quad y^2 = 9 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 9 - y^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{9-y^2}$$

Se plantea la desigualdad $9 - y^2 \geq 0$, al resolverla se obtiene que $y \in [-3, 3]$, pero $y \geq 0$, por tanto, el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid 0 \leq y \leq 3\}$, o bien, $y \in [0, 3]$

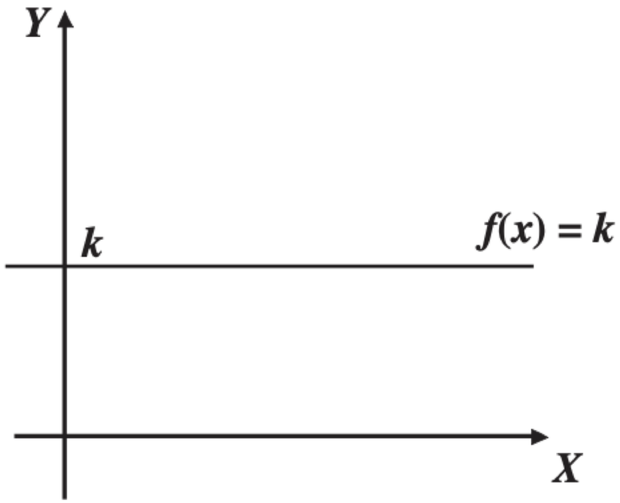
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Función constante

Función constante

$f(x) = k$ con $k \in R$ representa una recta paralela al eje "X" sobre k.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = \{k\}$



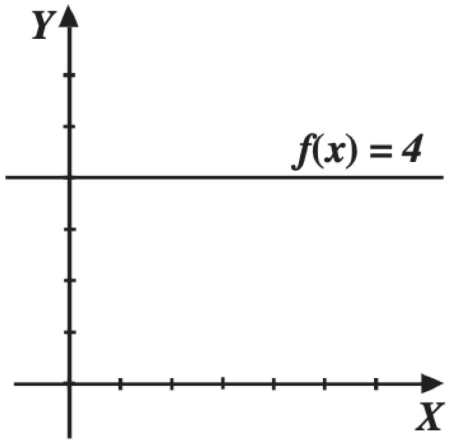
Ejemplo

Obtén la gráfica de $f(x) = 4$

Solución

Se traza una recta paralela al eje X sobre $y = 4$

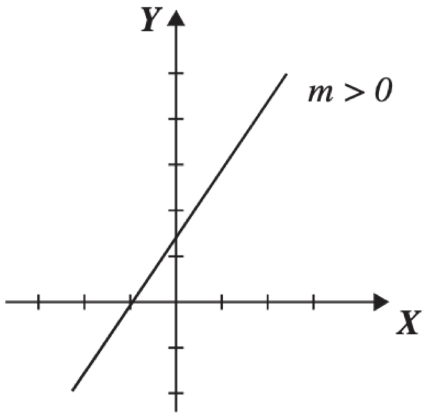
$D_f = R \qquad R_f = \{4\}$

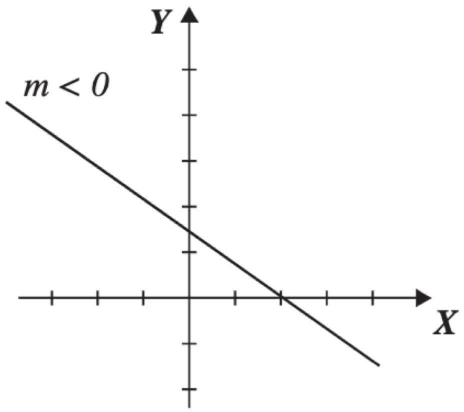


Función lineal

Esta función tiene la forma $f(x) = mx + b$ y representa una recta en el plano cartesiano, en donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$, Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$





Para graficar una función lineal se lleva a cabo lo siguiente:

I. Se localiza la ordenada al origen, es decir, el punto $(0, b)$.

II. A partir de este punto, se localiza otro, tomando la pendiente como el incremento o decremento vertical sobre el incremento horizontal.

Ejemplo 1

Grafica la función $y = \frac{2}{3}x + 4$

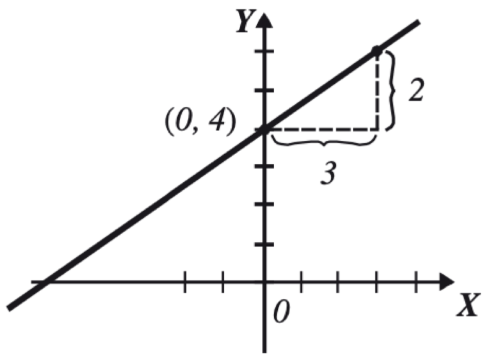
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$m = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \text{ incremento vertical}}{3 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 4, \text{ representa el punto } (0, 4)$$

Gráfica de la función



Ejemplo 2

Traza la gráfica de la función $y = -\frac{4}{5}x + 2$

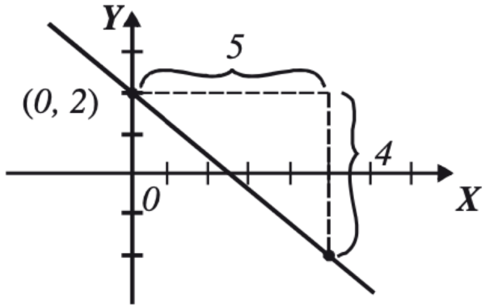
Solución

La pendiente y la ordenada al origen de la función:

$$y = -\frac{4}{5}x + 2$$

$$m = -\frac{4}{5} = \frac{-4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4 \text{ decremento vertical}}{5 \text{ incremento horizontal}}, \quad b = 2, \text{ representa el punto } (0, 2)$$

Gráfica de la función

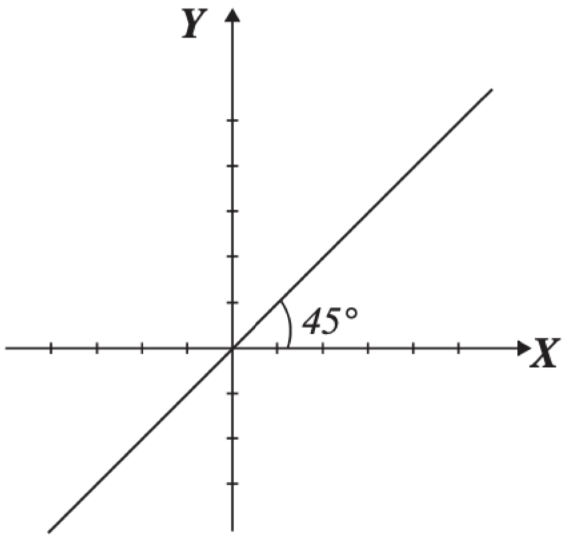


FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Función identidad

Es la función lineal $f(x) = mx + b$, con $m = 1$ y $b = 0$, es decir: $f(x) = x$

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$ Rango: $R_f = R$ o bien $y \in (-\infty, \infty)$



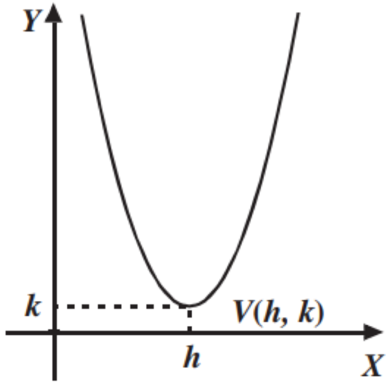
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Función cuadrática

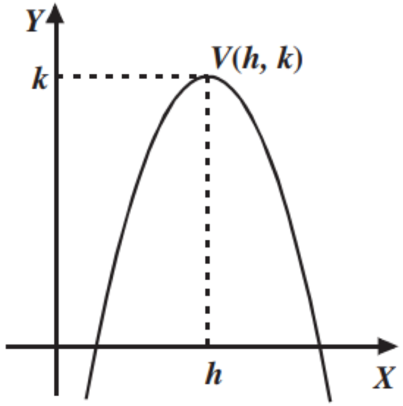
Función cuadrática

Es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y representa una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo

Si $a > 0$



Si $a < 0$



$V(h, k)$: son las coordenadas del vértice.

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, \infty\right)$

Dominio: $D_f = R$ o bien $x \in (-\infty, \infty)$

Rango: $y \in \left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$

Para obtener las coordenadas (h, k) del vértice se aplican las siguientes fórmulas:

$$h = -\frac{b}{2a},\ k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Ejemplo 1

Obtén el dominio, rango y la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Solución

Se identifican los valores de los coeficientes de cada término: $a = 1$, $b = -4$ y $c = 5$

$$a > 0, \text{ la parábola es cóncava hacia arriba}$$

Se calculan los valores de h y k:

$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2; \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(5) - (-4)^2}{4(1)} = 1$$

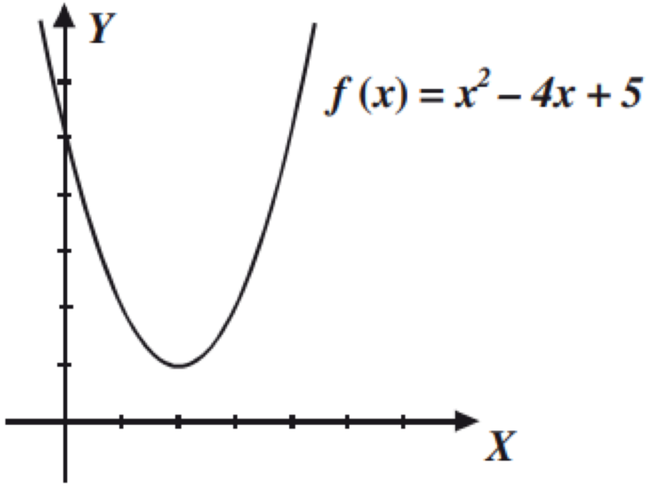
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

El vértice es el punto $V(2, 1)$ y el dominio y rango son:

$$D_f = R \text{ o bien } x \in (-\infty, \infty) \qquad y \in \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, \infty\right) = [1, \infty)$$

Para graficar, se tabula y se asignan valores de x menores y mayores que 2

x	0	1	2	3	4
y	5	2	1	2	5



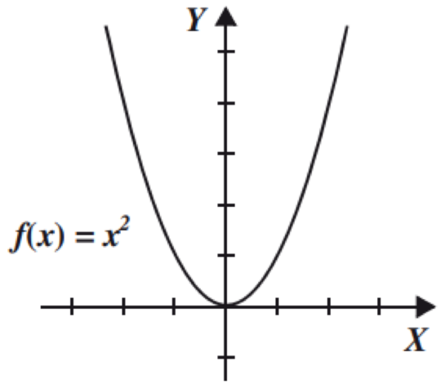
Ejemplo 2

Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^4$

Solución

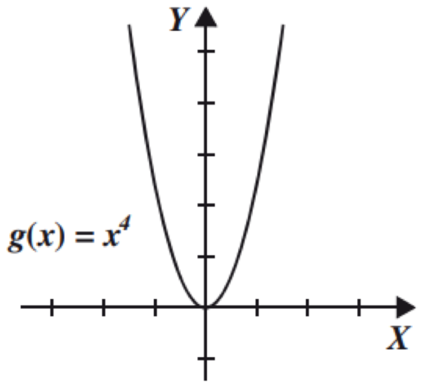
Se tabula con valores arbitrarios de x:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = x^2$	4	1	0	1	4



Al graficar se obtiene:

x	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^4$	$\frac{81}{16}$	1	0	1	$\frac{81}{16}$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

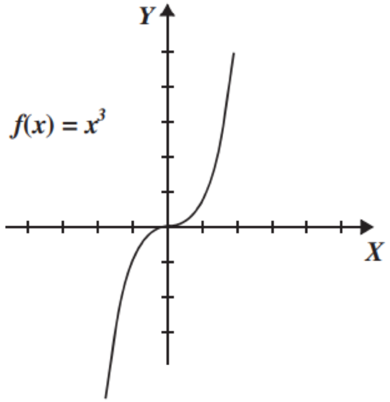
Ejemplo 3

Obtén la gráfica de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^5$

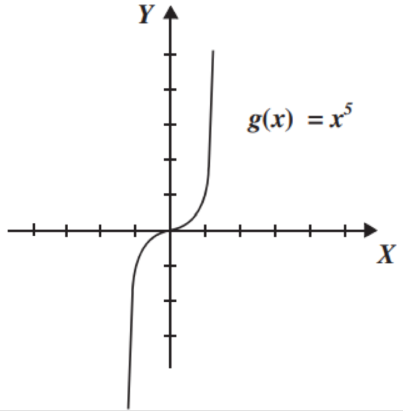
Solución

Se tabula para valores arbitrarios de x:

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^3$	−8	−1	0	1	8



x	$-\frac{3}{2}$	−1	0	1	$\frac{3}{2}$
$g(x) = x^5$	$-\frac{243}{32}$	−1	0	1	$\frac{243}{32}$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Función racional

Se expresa como el cociente de dos funciones polinomiales.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) \neq 0$$

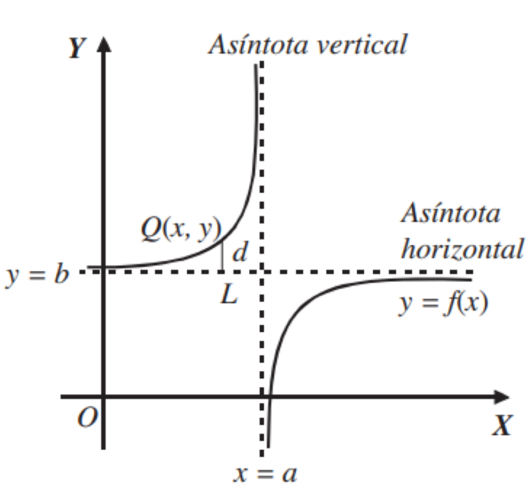
Definición de asíntota

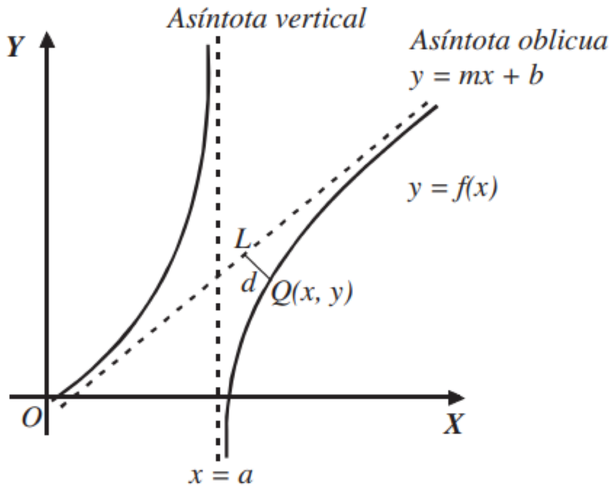
Si la distancia d entre una recta o curva L y el punto móvil $Q(x, y)$ de la función tiende a cero, entonces la recta o curva recibe el nombre de asíntota.

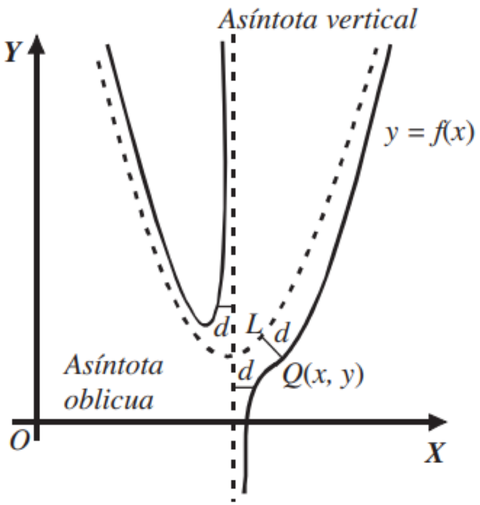
Existen tres tipos de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

Cuando la gráfica de la función $f(x)$ se acerca a la curva o recta $L(x)$ y la distancia d entre un punto de $f(x)$ y la curva o recta $L(x)$ tiende a cero (es decir la gráfica no toca a $L(x)$), entonces $L(x)$ recibe el nombre de asíntota.

Ejemplos 1, 2 y 3







FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

- **Asíntotas verticales**

  Una función de la forma $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, tiene asíntotas verticales si existen valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tal que se cumple lo siguiente:

$$Q(x_1) = Q(x_2) = \ldots = Q(x_n) = 0$$

- **Asíntotas horizontales**

  Se despeja la variable independiente x, si se obtiene una función de la forma $G(y) = \dfrac{R(y)}{S(y)}$, tal que para los valores de $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ se cumpla que:

$$S(y_1) = S(y_2) = \ldots = S(y_n) = 0$$

Ejemplo 1

Obtén la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución

El dominio de la función está dado por el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$, teniendo una asíntota en $x = 0$, es decir el eje vertical del plano.

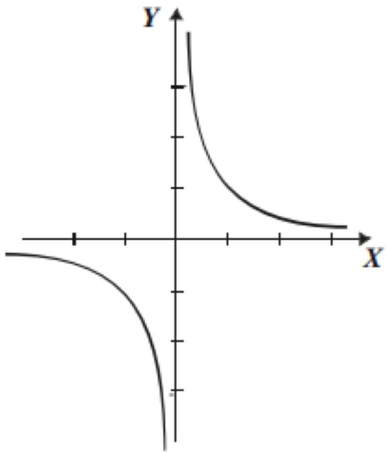
Al despejar x se obtiene $x = \dfrac{1}{y}$

De la cual se deduce que el rango está dado por $R_f = \{y \in R \mid y \neq 0\}$ y su asíntota horizontal es $y = 0$, es decir el eje horizontal del plano.

Si tabulas para valores de x diferentes de cero obtienes:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	no existe	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Se grafican las asíntotas y se localizan los puntos en el plano, se unen y se observa cómo la curva se acerca a las asíntotas sin tocarlas, haciendo la distancia entre la curva y las rectas cada vez más pequeña.



Ejemplo 2

Determina el dominio, el rango y la gráfica de la función $y = \dfrac{2x-3}{x+2}$

Solución

El denominador debe ser diferente de cero,

$$x + 2 \neq 0, \text{ entonces } x \neq -2$$

Por tanto, el dominio está dado por:

$$D_f = \{x \in R \mid x \neq -2\} \text{ o } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) \text{ y la asíntota vertical es } x = -2$$

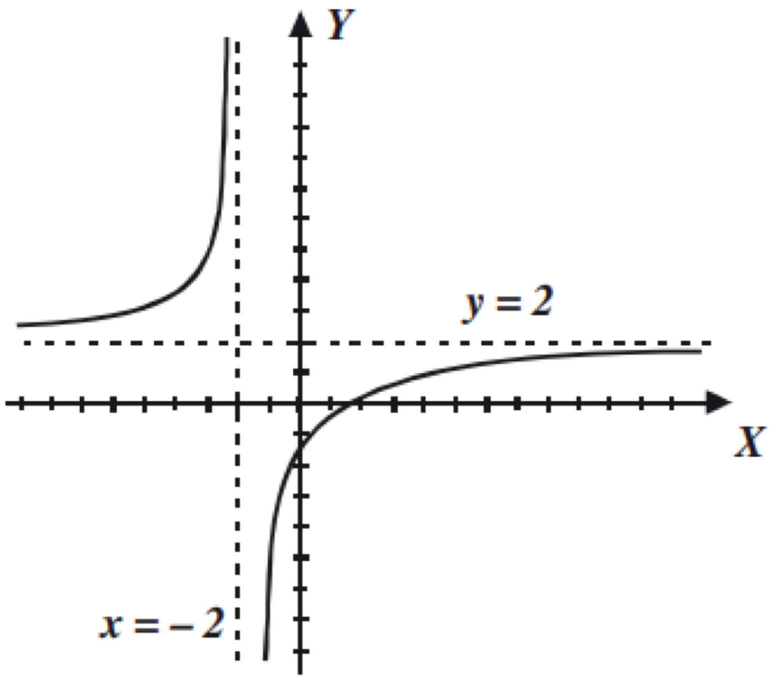
Al despejar x se obtiene el rango y la asíntota horizontal:

$$y = \frac{2x-3}{x+2}, \text{ entonces } x = \frac{2y+3}{2-y} \text{ donde } 2 - y \neq 0 \rightarrow y \neq 2$$

Por tanto, el $R_f = \{y \in R \mid y \neq 2\}$ y la asíntota horizontal es $y = 2$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Gráfica: Se trazan las asíntotas y mediante una tabulación se obtienen los pares ordenados, los cuales forman la siguiente curva:



Función raíz cruzada

La función está dada por: $f(x) = \sqrt{g(x)}$, con $g(x) \geq 0$

Ejemplo 1

Obtén la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

Solución

Para determinar el dominio se resuelve la desigualdad: $x + 2 \geq 0$ donde $x \geq -2$, entonces el dominio es el conjunto: $\{x \in R \mid x \geq -2\}$ o $x \in [-2, \infty)$

El rango se obtiene despejando x

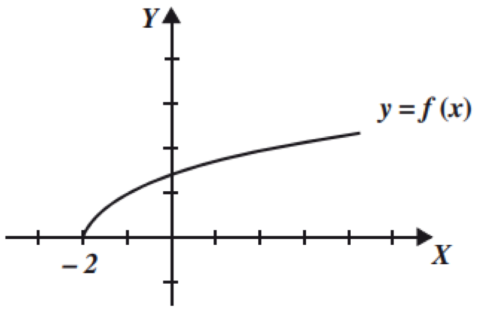
$$y = \sqrt{x+2} \quad \rightarrow \quad y^2 = x + 2 \quad \rightarrow \quad x = y^2 - 2$$

La función es una raíz positiva, o cero, es decir $y \in [0, \infty)$ y el despeje da como resultado una expresión polinomial donde $y \in R$, por tanto el rango está definido para $y \in [0, \infty)$

Al tabular dando algunos valores en el intervalo $x \in [-2, \infty)$ se obtiene:

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

La gráfica que se obtiene es:



Ejemplo 2

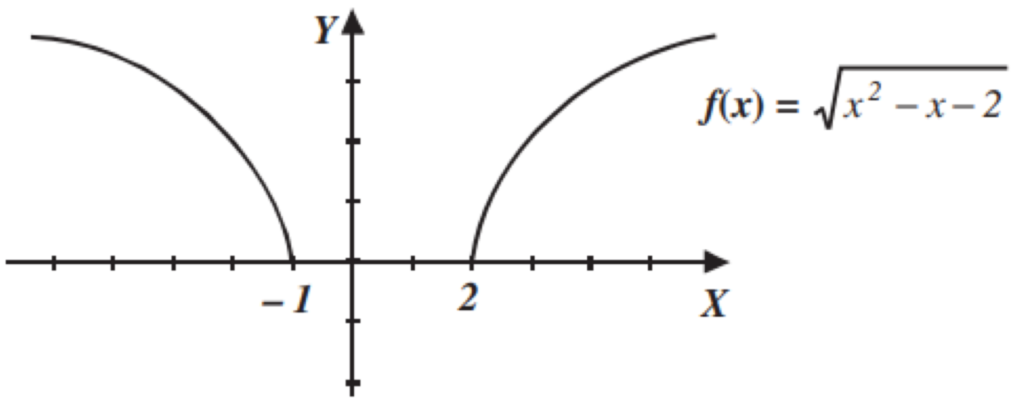
Determina la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $x^2 - x - 2 \geq 0$, obteniendo que

$$x \in (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$$

Al despejar x se obtiene, $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4y^2 + 9}}{2}$ donde $y \in (-\infty, \infty)$, $f(x)$ es una raíz positiva, o cero, por tanto el rango es: $y \in (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$



Ejemplo 3

Grafica la función $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Solución

Para obtener el dominio se resuelve la desigualdad $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$, obteniendo que:

$$x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$$

Al despejar x para obtener el rango:

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{x-1}{x+1} \quad \rightarrow \quad y^2(x+1) = x-1 \quad \rightarrow \quad y^2x + y^2 = x - 1$$

$$y^2x - x = -1 - y^2$$

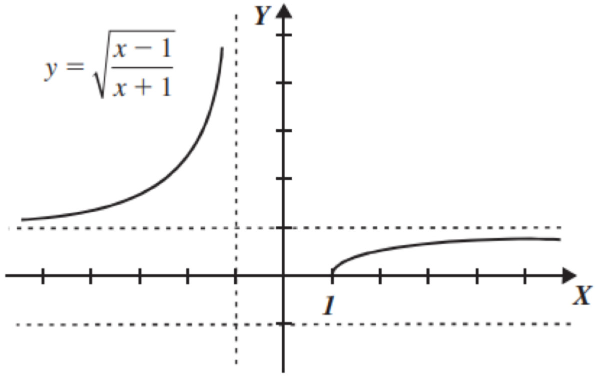
$$x(y^2 - 1) = -1 - y^2$$

$$x = \frac{-1-y^2}{y^2-1}, \text{ donde } y \neq \pm 1.$$

La función es una raíz positiva, por tanto, $y \in [0, \infty)$, entonces el rango corresponde a:

$$y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$$

La función tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y dos horizontales en $y = -1$, $y = 1$, al graficar se obtiene:



Nota: Observe que gráficamente $y = -1$ no es asíntota.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Función valor absoluto

La función es $f(x) = |g(x)|$, donde $x \in D_g$ y $f(x) \geq 0$.

Ejemplo 1

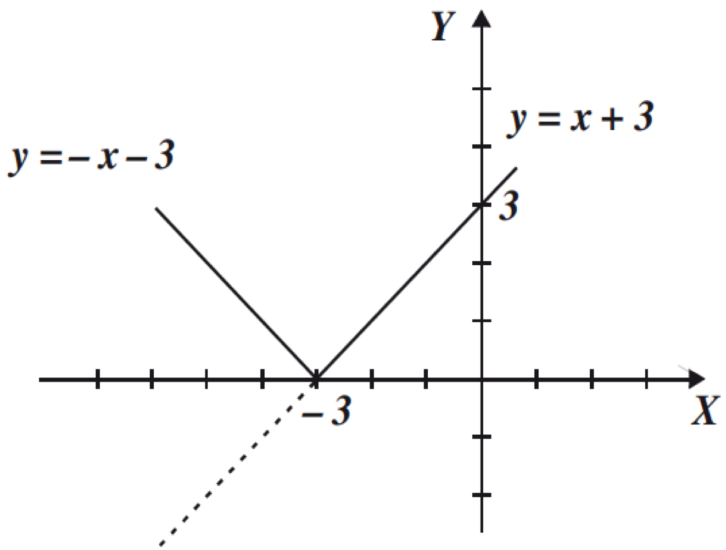
Obtén la gráfica de $f(x) = |x + 3|$.

Solución

Se parte de la definición de valor absoluto, en la que $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$, se obtienen las siguientes igualdades:

$y = x + 3$, $y = -x - 3$, las cuales son dos rectas donde el dominio son los números reales y el rango está dado por $y \in [0, \infty)$

La gráfica que se obtiene es:



Ejemplo 2

Obtén la gráfica de $f(x) = \left|\frac{2}{x}\right|$.

Solución

$\frac{2}{x}$, está definido para $x \neq 0$, por tanto el dominio es el conjunto $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ o bien

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

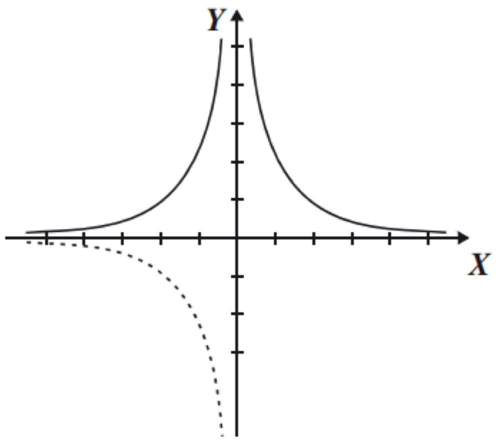
Para el rango se despeja x de las igualdades que se obtienen al aplicar la definición de valor absoluto.

$$y = \frac{2}{x} \rightarrow x = \frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0, \qquad y = -\frac{2}{x} \rightarrow x = -\frac{2}{y}, \text{ donde } y \neq 0$$

También se toma el hecho de que $f(x) > 0$, ya que $\left|\frac{2}{x}\right| > 0$, por tanto el rango es el conjunto $R_f = \{y \in R \mid y > 0\}$ o bien $y \in (0, \infty)$.

La asíntota horizontal es $y = 0$, mientras que la vertical es la recta $x = 0$.

Luego la gráfica que se obtiene es:



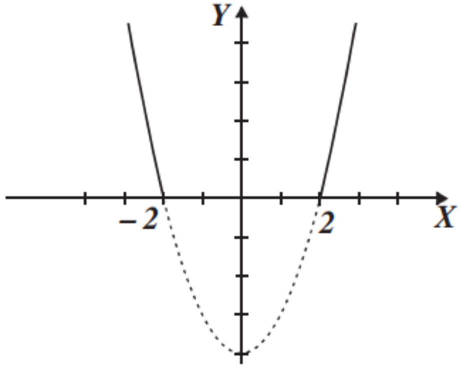
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 3

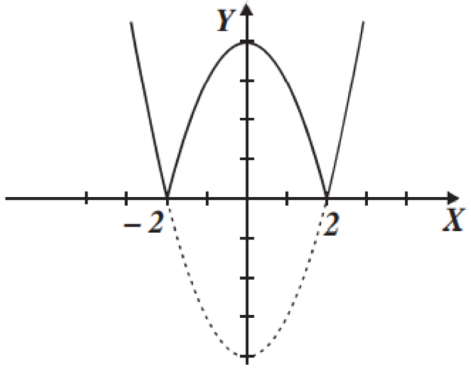
Obtén la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$.

Solución

$y = x^2 - 4$ es una función cuadrática con dominio $x \in R$ y rango $y \in [-4, \infty)$, teniendo como gráfica:



$f(x) \geq 0$, luego el rango de la función es: $y \in [0, \infty)$, por tanto, al hacer positiva la parte donde $x^2 - 4$ es negativa se obtiene la siguiente gráfica:



Ejemplo 4

Obtén el dominio, el rango y la gráfica de $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$

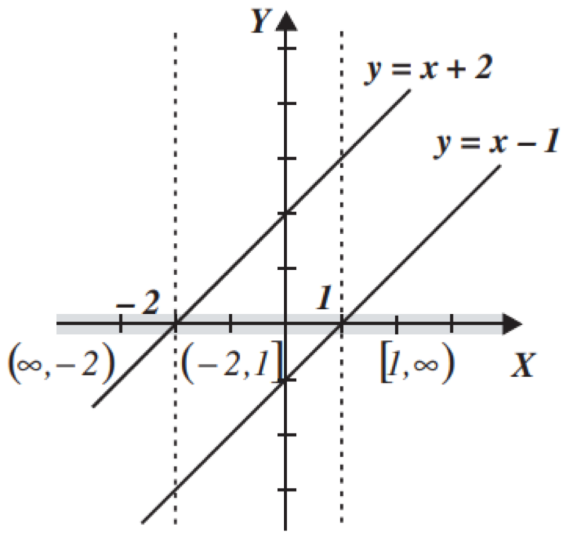
Solución

Dominio: Para $y = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$, por tanto el dominio de la función está dado por:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$$

Rango: $f(x) > 0$, por tanto, el rango está dado por $y \in [0, \infty]$, pero al despejar "x" se obtiene $x = \dfrac{1-2y}{y-1}$, entonces $y \neq 1$, por tanto $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

Gráfica 1



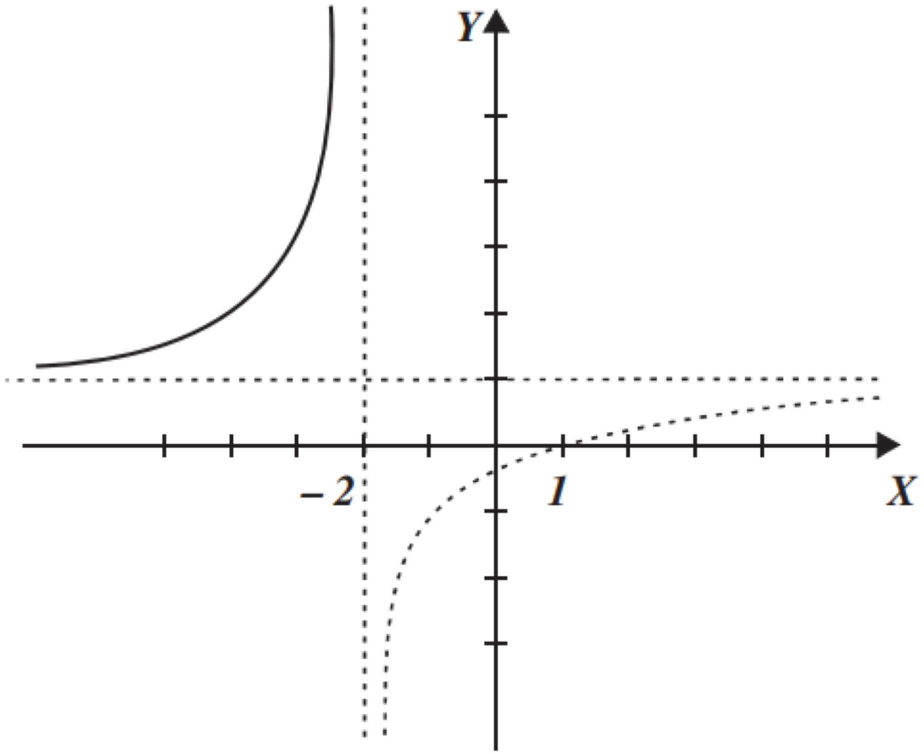
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

En la gráfica 1 se muestran los intervalos que se analizarán para construir la gráfica que se propone.

i) En el intervalo $(-\infty, -2)$ las rectas $y = x - 1$, $y = x + 2$, toman valores negativos, es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{-(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

La porción de gráfica en el intervalo $(-\infty, -2)$ es:



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

ii) En el intervalo $(-2, 1]$

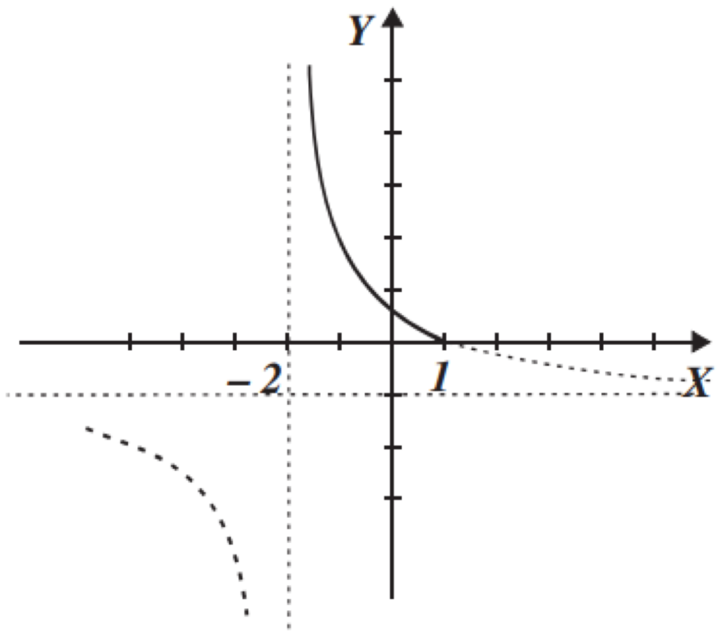
$$y = x - 1 \text{ toma valores negativos}$$

$$y = x + 2 \text{ los toma positivos}$$

es decir:

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{-(x-1)}{+(x+2)} = \frac{1-x}{x+2}$$

La porción de gráfica es:



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

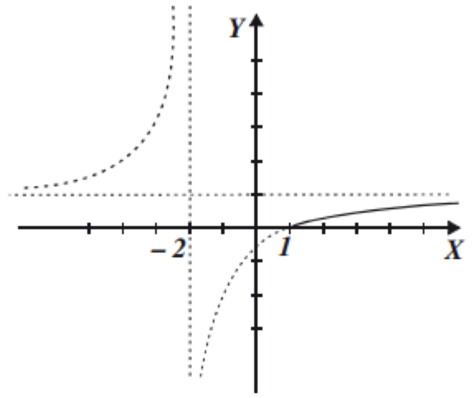
iii) En el intervalo $[-1, \infty)$

$$y = x - 1, y = x + 2$$

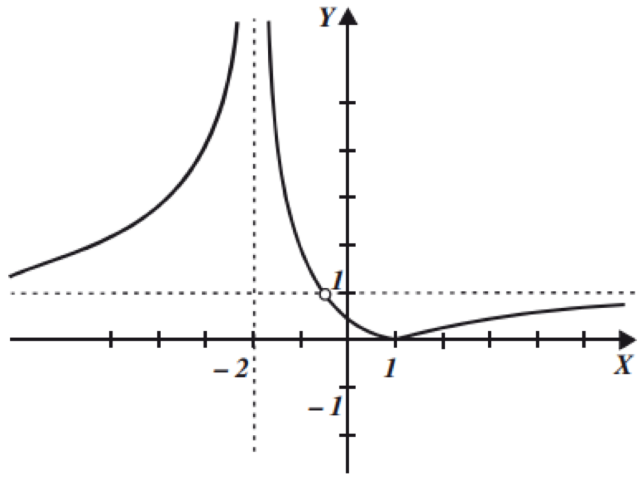
toma valores positivos es decir

$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{+(x-1)}{+(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

Tiene la misma gráfica que en el caso i)
La porción de gráfica es:



Finalmente, la gráfica es la unión de las porciones de gráfica en cada intervalo.



Nota: En la gráfica aparece un hueco en $y = 1$ ya que el rango es $y \in [0, 1) \cup (1, \infty)$

GRACIAS

FACULTAD DE
CONTADURÍA Y
ADMINISTRACIÓN
FCA