FACULTAD DE
**CONTADURÍA Y
ADMINISTRACIÓN**

FCA

# LÍMITES

SESIÓN 2

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Definición intuitiva de límite

Si al aproximar $x$ lo suficientemente cerca de un número $a$ (sin ser $a$) tanto del lado izquierdo como del derecho, $f(x)$ se aproxima a un número $L$, entonces el límite cuando $x$ tiende al número $a$ es $L$. Esto lo escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Donde la notación $x \to a$ se lee "$x$ tiende a $a$", para decir que: "tiende a $a$ por la izquierda" se utiliza $x \to a^-$, para decir que: "$x$ tiende a $a$ por la derecha" utilizamos $x \to a^+$, de tal forma que:

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Es decir, si los límites laterales existen y tienden a un mismo número $L$ entonces el límite cuando tiende al número $a$ es $L$. Para que el límite exista no se necesita que la función esté definida para el número $a$, basta que esté definida para valores muy cercanos.

# Ejemplo 1

Determina el límite cuando $x$ tiende a 3 de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

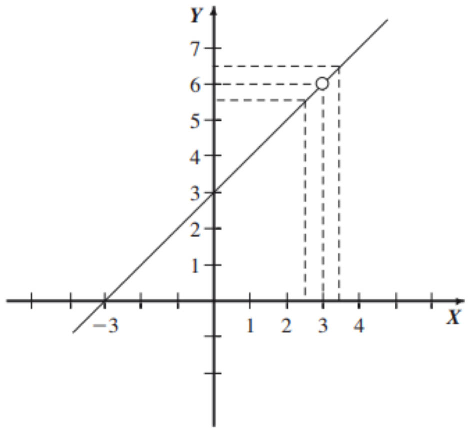
**Solución**

La función no está definida para $x = 3$, sin embargo, podemos evaluar la función en valores muy cercanos por la izquierda y por la derecha. Por otro lado graficaremos la función utilizando la simplificación:

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3$$

es decir, graficamos la recta $f(x) = x + 3$ con la restricción $x \neq 3$ donde se formará un hueco.

| x | f(x) |
|---|---|
| 2.9 | 5.9 |
| 2.99 | 5.99 |
| 2.999 | 5.999 |
| 2.9999 | 5.9999 |
| 3.0001 | 6.0001 |
| 3.001 | 6.001 |
| 3.01 | 6.01 |
| 3.1 | 6.1 |




Se observa que para valores de $x$ muy cercanos a 3 por la izquierda (2.9, 2.99, 2.999, 2.9999), $f(x)$ tiende a 6, lo mismo pasa para valores cercanos por la derecha (3.0001, 3.001, 3.01, 3.1), es decir:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

por tanto $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

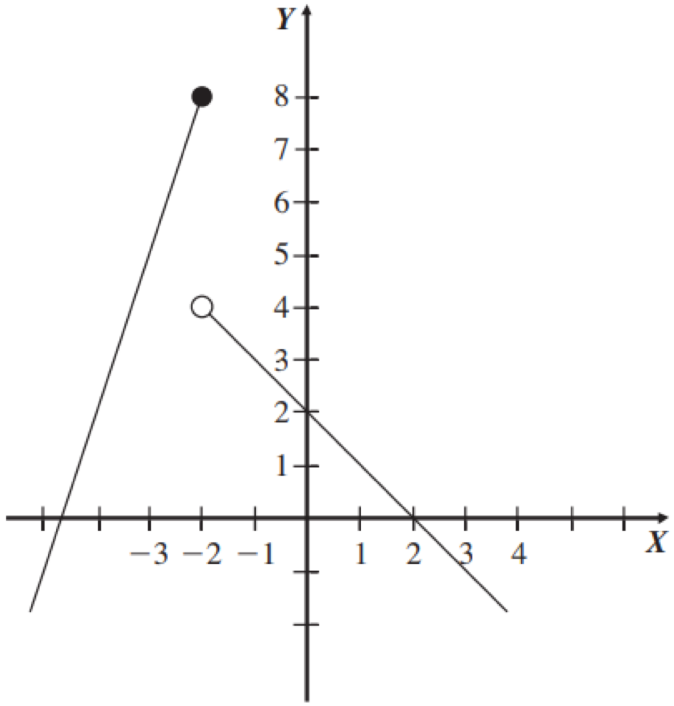
# Ejemplo 2

Si $f(x) = \begin{cases} 3x+14 & \text{si } x \leq -2 \\ -x+2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ determina $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

**Solución**

Graficamos la función y evaluamos en valores muy cercanos a 2.

| x | f(x) |
|---|---|
| −2.1 | 7.7 |
| −2.01 | 7.97 |
| −2.001 | 7.997 |
| −1.999 | 3.999 |
| −1.99 | 3.99 |
| −1.9 | 3.9 |




Aquí tenemos que: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 8$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$

entonces $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ por tanto $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe

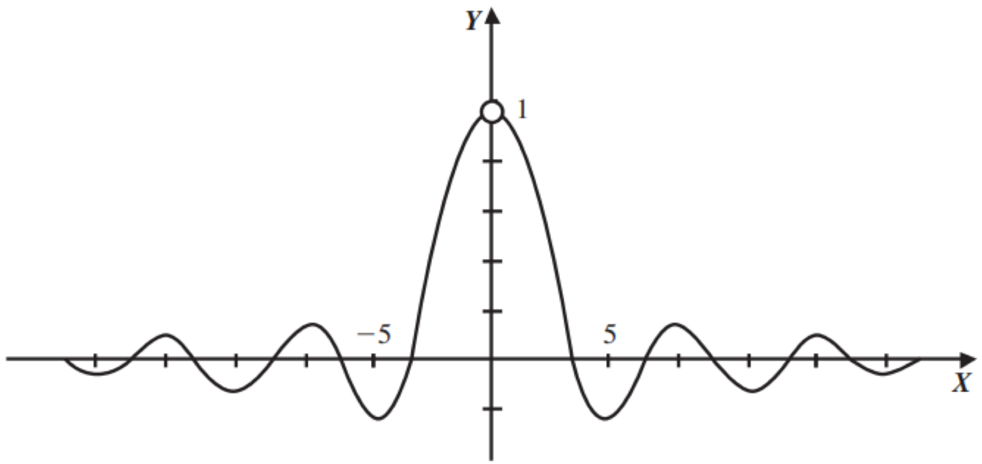
# Ejemplo 3

Determina $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$

**Solución**

Evaluamos con valores muy cercanos a 0 por la izquierda y por la derecha. Observe que la función no está definida en $\theta = 0$ y que los valores serán tomados como radianes.

| $\theta$ | $f(\theta)$ |
|---|---|
| −0.005 | 0.999995833 |
| −0.004 | 0.99999733 |
| −0.003 | 0.9999985 |
| −0.001 | 0.999999833 |
| 0.001 | 0.999999833 |
| 0.003 | 0.9999985 |
| 0.004 | 0.99999733 |
| 0.005 | 0.999995833 |



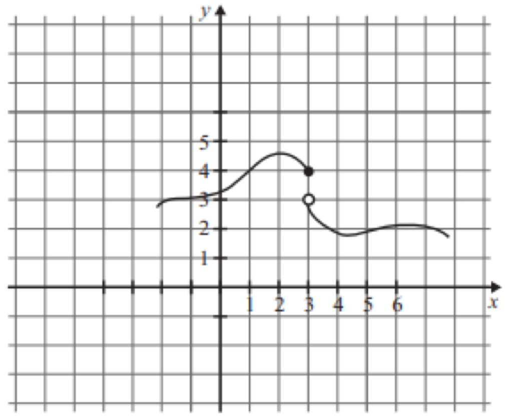

Tenemos: $\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$ y $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$

entonces $\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$ por tanto $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 4

Para la función $f(x)$ mostrada en la figura determina: *a*) $\lim_{x\to 1} f(x)$ y *b*) $\lim_{x\to 3} f(x)$



**Solución**

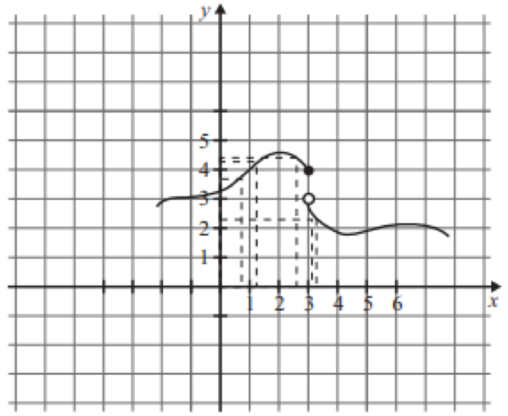
*a*) Calculamos los límites por la izquierda y derecha

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$

los límites laterales son iguales por tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

*b*) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$

los límites laterales son diferentes, por tanto $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

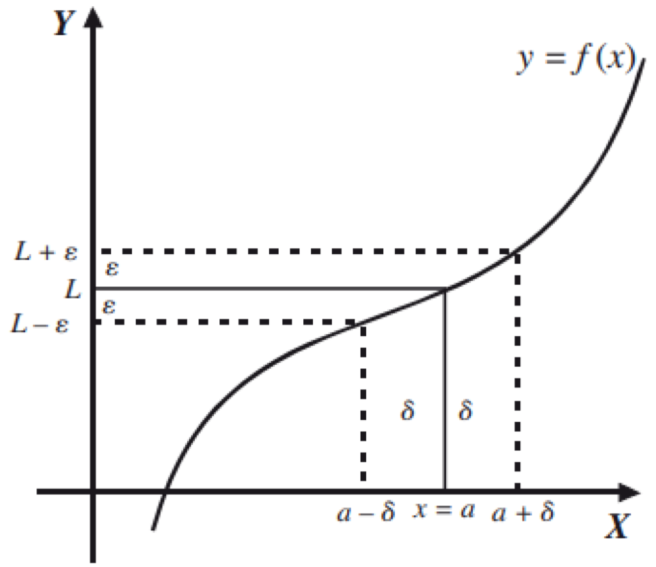
# Definición formal del límite

A continuación se presenta la definición formal de límite, la cual también es conocida como definición $\varepsilon$-$\delta$ (epsilón-delta).

El $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que:

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho de otra forma, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si para cualquier número positivo elegido $\varepsilon$, por pequeño que sea, existe un número positivo $\delta$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$




La definición nos dice que para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ existe un número $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para un número $\varepsilon > 0$ dado, tal que todo $x$ en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ con excepción posiblemente del mismo $a$, tendrá su imagen $f(x)$ en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Observa que para un $\delta_1 < \delta$ para el mismo $\varepsilon$, la imagen de un valor $x$ en el intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_1)$ estará dentro del intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lo cual sólo cambia si tomamos un valor de epsilón distinto.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 1

Demuestra que $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$

**Solución**

Para un $\varepsilon > 0$, se quiere encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $0<|x-3|<\delta$ entonces:

$$|(2x-1)-5|<\varepsilon$$

de donde

$$|(2x-1)-5| = |2x-6| = |2(x-3)| = |2|\,|x-3| = 2|x-3| < \varepsilon$$

entonces $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, por lo que basta escoger $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ para que $0<|x-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

**Comprobación**

Para $0<|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ tenemos que

$$|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$2|x-3|<\varepsilon$$

$$|2(x-3)|<\varepsilon$$

$$|2x-6|<\varepsilon$$

$$|(2x-1)-5|<\varepsilon$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 2 y 3

Demuestra que $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = -7$

**Solución**

Si $0 < |x - (-1)| < \delta$ entonces $\left|\frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} - (-7)\right| < \varepsilon$

de donde

$$\left|\frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} + 7\right| = \left|\frac{x^2 - 5x - 6 + 7x + 7}{x + 1}\right| = \left|\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}\right|$$

$$= \left|\frac{(x + 1)^2}{x + 1}\right| = |x + 1| = |x - (-1)| < \varepsilon$$

por tanto se escoge $\delta = \varepsilon$

Si $\lim_{x \to 1} (2 - 3x) = -1$ y $\varepsilon = 0.06$, determina el valor de $\delta$.

**Solución**

Se aplica la definición y se obtiene:

Si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $|(2 - 3x) - (-1)| < \varepsilon$, donde $|3 - 3x| < \varepsilon$

$$|3|\,|1 - x| < \varepsilon$$

$$|1 - x| < \frac{\varepsilon}{|3|}$$

Pero $|1 - x| = |x - 1|$, por tanto, $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ y el valor de $\delta$ está determinado por:

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{0.06}{3} \leq 0.02$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Teoremas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, $c$ una constante y $n$ número real, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ con $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Límites por evaluación

El límite se obtiene al aplicar los teoremas anteriores y evaluar el valor al cual tiende la variable en la función propuesta, como se muestra en los siguientes ejemplos.

# Ejemplo 1 y 2

Utiliza los teoremas anteriores y comprueba que el $\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4)=6$

**Solución**

Se aplican los respectivos teoremas, se evalúa el valor de $x = 2$, y se demuestra que:

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x-4) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3x - \lim_{x\to 2} 4 = \left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 3\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 4 = (2)^2 + 3(2) - 4 = 6$$

Si $f(x) = \dfrac{3-2x}{3+2x}$, determina el valor de $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$

**Solución**

Se aplican los teoremas y se sustituye el valor de $x$ para obtener el valor buscado:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{3-2x}{3+2x} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(3-2x)}{\lim_{x\to\frac{1}{2}}(3+2x)} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}} 3 - \lim_{x\to\frac{1}{2}} 2x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}} 3 + \lim_{x\to\frac{1}{2}} 2x} = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}} 3 - 2\lim_{x\to\frac{1}{2}} x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}} 3 + 2\lim_{x\to\frac{1}{2}} x} = \frac{3-2\left(\frac{1}{2}\right)}{3+2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Estos teoremas nos permiten hacer una sustitución de la variable independiente por el valor al que tiende el límite.

# Ejemplo 3 y 4

Si $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$, encuentra el valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$

**Solución**

Se sustituye el valor de la variable independiente y se obtiene el límite:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{4}{(2)^2 - 4} = \frac{4}{4 - 4} = \frac{4}{0}$$

El límite no existe, ya que la división entre cero no está definida.

Obtén el $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{2x + 1}$

**Solución**

Se sustituye $x = 3$ y se realizan las operaciones:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x + 1} = \frac{\sqrt{9 - (3)^2}}{2(3) + 1} = \frac{\sqrt{9 - 9}}{6 + 1} = \frac{0}{7} = 0$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Límites indeterminados

Son aquellos cuyo resultado es de la forma $\frac{0}{0}$.

Se sustituye el valor de la variable independiente en cada caso y se realizan las respectivas operaciones, para obtener:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6} = \frac{(3)^2 - 9}{2(3) - 6} = \frac{9 - 9}{6 - 6} = \frac{0}{0}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\sqrt{1 - 1}}{(1)^2 - 2(1) + 1} = \frac{\sqrt{0}}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{0}$

3. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{3y^2 + 5y^4}{2y^2 - 3y^4} = \frac{3(0)^2 + 5(0)^4}{2(0)^2 - 3(0)^4} = \frac{0}{0}$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \frac{\sqrt{(2)^2 + 5} - 3}{2 - 2} = \frac{\sqrt{9} - 3}{0} = \frac{0}{0}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Se observa que los resultados son de la forma $\dfrac{0}{0}$, por consiguiente es necesario eliminar la indeterminación.

Una indeterminación se elimina al factorizar o racionalizar (de ser posible) la función, para después simplificarla y obtener el límite.

Casos de factorización:

*a*) Factor común $\quad ax^n + bx^{n-1} = x^{n-1}(ax+b)$

*b*) Diferencia de cuadrados $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

*c*) Trinomio cuadrado perfecto $\quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

*d*) Trinomio de la forma $\quad x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

*e*) Suma o diferencia de cubos $\quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

*f*) Factorización de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{a^{2/3} + a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

*g*) Factorización de $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ $\quad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \dfrac{a+b}{a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}}$

*h*) Factorización de $\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}$ $\quad \sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b} = \dfrac{a-b}{a^{4/5} + a^{3/5}b^{1/5} + a^{2/5}b^{2/5} + a^{1/5}b^{3/5} + b^{4/5}}$

*i*) Factorización de $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ $\quad \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} = \dfrac{a-b}{a^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{n-3}{n}}b^{\frac{2}{n}} + \ldots + a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-2}{n}} + b^{\frac{n-1}{n}}}$

# Ejemplo 1

Obtén el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8}$

**Solución**

Al sustituir $x$ con 0 en la función, el límite se indetermina:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{3(0)^2 + 5(0)^4}{2(0)^2 + 6(0)^4 - 7(0)^8} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación se factorizan el numerador y el denominador con la aplicación del factor común:

$$\frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{x^2(3 + 5x^2)}{x^2(2 + 6x^2 - 7x^6)}$$

Al simplificar la expresión se obtiene:

$$\frac{3 + 5x^2}{2 + 6x^2 - 7x^6}$$

Luego el límite es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + 5x^2}{2 + 6x^2 - 7x^6} = \frac{3 + 5(0)^2}{2 + 6(0)^2 - 7(0)^6} = \frac{3}{2}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5x^4}{2x^2 + 6x^4 - 7x^8} = \frac{3}{2}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 2

Determina el $\lim\limits_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x + 2}$

**Solución**

Se sustituye el valor de $x = -2$ en la expresión:

$$\lim_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} = \frac{4 - (-2)^2}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

Se factoriza el numerador con la aplicación de la diferencia de cuadrados:

$$4 - x^2 = (2 + x)(2 - x)$$

Se simplifica y sustituye para obtener,

$$\lim_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(2 + x)(2 - x)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (2 - x) = 2 - (-2) = 4$$

Por consiguiente:

$$\lim_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} = 4$$

# Ejemplo 3

Calcula el valor del $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{y^2 - 2y + 1}{y^2 - 4y + 3}$

**Solución**

Al sustituir $y = 1$ se verifica que existe la indeterminación:

$$\lim_{y \to 1} \frac{y^2 - 2y + 1}{y^2 - 4y + 3} = \frac{(1)^2 - 2(1) + 1}{(1)^2 - 4(1) + 3} = \frac{1 - 2 + 1}{1 - 4 + 3} = \frac{0}{0}$$

Al factorizar el numerador (trinomio cuadrado perfecto) y el denominador (trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$), se obtiene:

$$\lim_{y \to 1} \frac{y^2 - 2y + 1}{y^2 - 4y + 3} = \lim_{y \to 1} \frac{(y - 1)^2}{(y - 3)(y - 1)} = \lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{y - 3} = \frac{1 - 1}{1 - 3} = \frac{0}{-2} = 0$$

Finalmente, el resultado es:

$$\lim_{y \to 1} \frac{y^2 - 2y + 1}{y^2 - 4y + 3} = 0$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 4

Determina el $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2}$

**Solución**

Al sustituir $x = 2$ se observa que existe la indeterminación:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(2)^3 - 8}{2(2)^2 - 3(2) - 2} = \frac{8 - 8}{8 - 6 - 2} = \frac{0}{0}$$

Se factoriza la diferencia de cubos y el trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4), \qquad 2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$$

Se simplifica, se sustituye y se obtiene el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(2x + 1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 1} = \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{2(2) + 1} = \frac{12}{5}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{12}{5}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 5

Calcula el valor del $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$

**Solución**

Se sustituye $x = 2$ en la función:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}} = \frac{(2)^2-4}{3-\sqrt{2+7}} = \frac{4-4}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Se racionaliza el denominador de la función, multiplicando por $3+\sqrt{x+7}$, que es el conjugado de la expresión $3-\sqrt{x+7}$:

$$\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}} \cdot \frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}} = \frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{(3)^2-\left(\sqrt{x+7}\right)^2} = \frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{9-(x+7)} = \frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se factoriza $x^2 - 4$:

$$\frac{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x} = \frac{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x} = \frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}$$

Se simplifica la expresión,

$$\frac{-(2-x)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x} = -(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}} = \lim_{x\to 2}\left[-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)\right] = -(2+2)\left(3+\sqrt{2+7}\right) = -(4)(3+3) = -24$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}} = -24$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 6

Determina $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$

**Solución**

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x^{2/3}+x^{1/3}2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^{2/3}+x^{1/3}2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{2^{2/3}+2^{1/3}\cdot 2^{1/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{2^{2/3}+2^{2/3}+2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\cdot 2^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

Por tanto $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Límites cuando x tiende al infinito

Sea una función $f$ definida en el intervalo $(a, \infty)$. Si se tiene que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

entonces significa que los valores de $f(x)$ se aproximan a $L$ tanto como se quiera para una $x$ lo suficientemente grande, sabemos que $\infty$ no es un número, sin embargo, se acostumbra decir "el límite de $f(x)$, cuando $x$ tiende al infinito, es $L$".

Cuando en una función $x \to \infty$, se busca la base de mayor exponente y ésta divide a cada uno de los términos de la función, después, para obtener el valor del límite, se aplica el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ , con } c \text{ constante}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 1

Encuentra el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+4}{6x^2+2x-1}$

**Solución**

La base del término con mayor exponente es $x^2$, por consiguiente, todos los términos del numerador y del denominador se dividen entre esta base:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+4}{6x^2+2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}$$

Se simplifica y aplica el teorema para obtener el límite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{6+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 6+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}} = \frac{2-0+0}{6+0-0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+4}{6x^2+2x-1} = \dfrac{1}{3}$

# Ejemplo 2

Determina el $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2-5}}{2x+3}$

**Solución**

La base del término con mayor exponente es $x$, por tanto, se dividen los términos entre esta base y se simplifica la expresión para obtener el valor del límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2-5}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{9x^2-5}}{x}}{\dfrac{2x+3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{9x^2-5}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9-\dfrac{5}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 9 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{9-0}}{2+0} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 3

Determina el resultado de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{x^3+2}$

**Solución**

Se dividen todos los términos entre $x^3$, se simplifica y se obtiene el valor del límite.

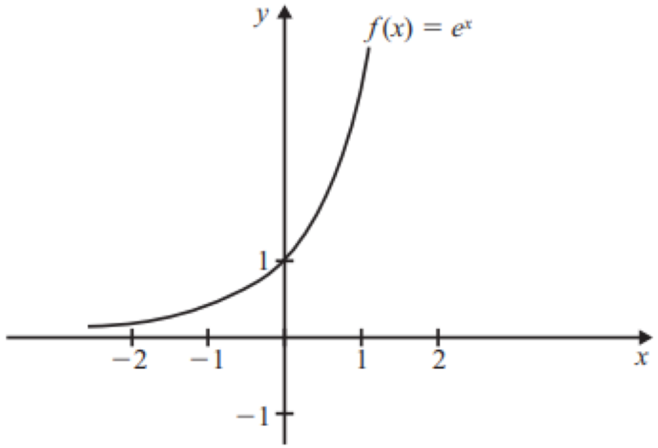
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x^3+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x}{x^3}+\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^3}} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x^3+2} = 0$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Si observamos la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$, tenemos que cuando $x \to -\infty$, $f(x)$ tiende a cero.

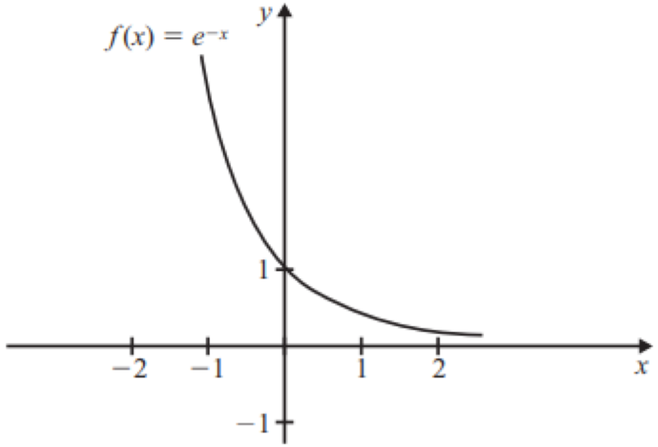



entonces $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

esto cumple también cuando tenemos la función $g(x) = a^x$ para $a > 0$, es decir

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \text{ para } a > 0$$

Por otro lado, si tenemos $f(x) = e^{-x}$, tenemos que cuando $x \to \infty$, $f(x)$ se aproxima a cero.




entonces $\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$

También se cumple $\lim_{x \to \infty} a^{-x} = 0$ para $a > 0$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

# Asíntotas horizontales

Sea la función $y = f(x)$, si la curva tiene una asíntota horizontal en $y = c$, entonces la ecuación de la asíntota es:

$$y = \lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{o} \quad y = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

# Ejemplo 1

Encuentra la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+3}$

**Solución**

Al aplicar $y = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ , se obtiene:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x+1}{x}}{\dfrac{2x+3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{3}{x}} = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la curva tiene una asíntota horizontal en $y = \dfrac{3}{2}$ o $2y - 3 = 0$

# Ejemplo 2 y 3

Determina la ecuación de la asíntota horizontal de $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

**Solución**

Se aplica $y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, entonces la asíntota horizontal tiene por ecuación:

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

El resultado $y = 0$ indica que la asíntota horizontal es el eje $X$.

Obtén la ecuación de la asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

**Solución**

Se aplica la definición $y = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y se obtiene:

$$y = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{x-3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{0}$$

El límite no existe ya que la división entre cero no está definida.

El resultado indica que la curva no tiene asíntotas horizontales.

# Asíntotas oblicuas

Se le denomina asíntota oblicua a aquella recta cuyo ángulo de inclinación $\theta$ es diferente de 0° y 90°.

*Caso I*

Sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el grado de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$ siendo $f(x) = ax + b + \dfrac{R(x)}{P(x)}$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - (ax + b) \right] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} \left[ f(x) - (ax + b) \right] = 0$$

# Ejemplo 1

Determina las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$

**Solución**

La función no tiene asíntotas horizontales, pero sí posee una asíntota vertical en $x = -1$

El grado del numerador es un grado mayor que el grado del denominador y éste no es factor del numerador, entonces:

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{x + 1}$$

Para obtener la asíntota oblicua se aplica cualquiera de las dos condiciones:

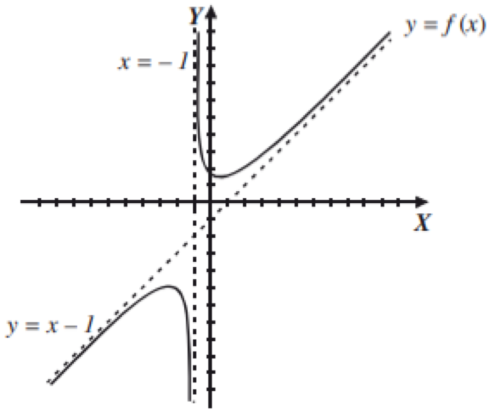
$$\lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - (ax + b) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - (x - 1) \right]$$

Pero $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{x+1}$, por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{3}{x+1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{0}{1+0} = 0$$

La función tiene una asíntota oblicua en la recta $y = x - 1$




FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 2

Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

**Solución**

La función carece de asíntotas verticales y horizontales, para obtener las asíntotas oblicuas la función se representa de la siguiente forma:

$$f(x) = x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

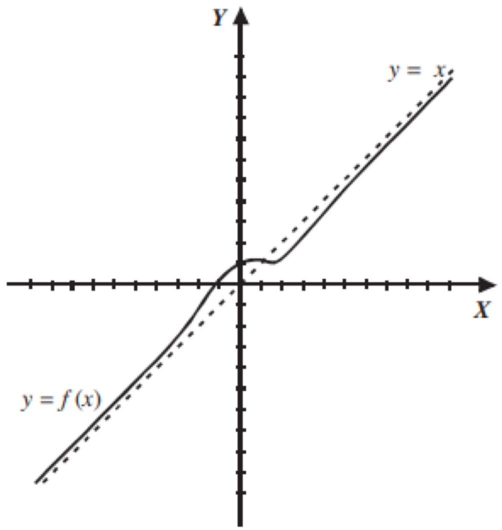
Para comprobar que $y = x$ es la ecuación de la asíntota oblicua, se aplica la definición:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)] = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2+1}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right)$$

Se obtiene el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

Por tanto, la función tiene una asíntota oblicua en $y = x$




FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Analicemos otro método; sea una función racional de la forma $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es un grado mayor que el de $P(x)$ y $P(x)$ no es factor de $Q(x)$, entonces $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en la recta $y = ax + b$, cuyos valores de $a$ y $b$ están dados por:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$$

# Ejemplo 1

Obtén las ecuaciones de las asíntotas y traza la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x}$

**Solución**

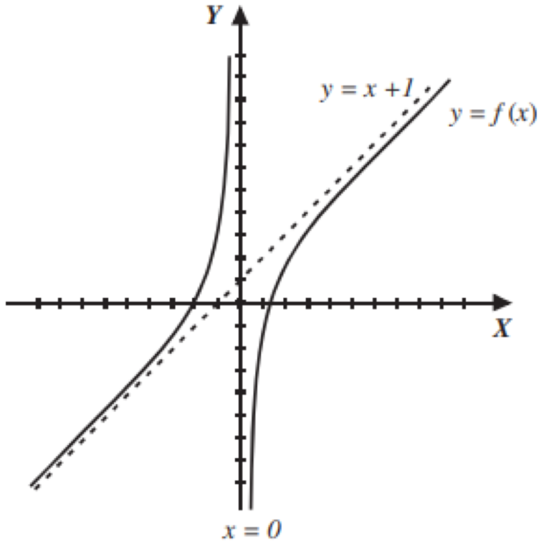
La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y no tiene asíntota horizontal, para obtener la ecuación de la asíntota oblicua se aplican los límites anteriores:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 + x - 3}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 + x - 3 - x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1$$

Se sustituyen $a$ y $b$ en la ecuación $y = ax + b$, por tanto, la asíntota es: $y = x + 1$

Gráfica




FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

## *Caso II*

Sea una función $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ donde el grado de $Q(x)$ es mayor que uno y mayor al grado de $P(x)$, la función tiene una asíntota oblicua no lineal.

# Ejemplo 1

Determina las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

**Solución**

Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

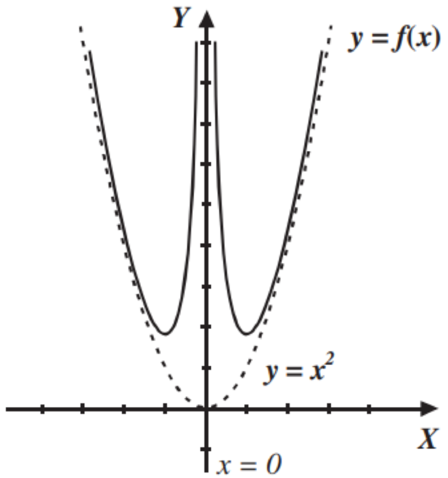
Se realiza el cociente y el resultado es:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Por consiguiente, la función tiene una asíntota cuya ecuación es $y = x^2$



# Límites laterales

### *Límite por la derecha*

Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo abierto $(x_o, b)$, el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $x_o$ por la derecha es $L$ y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a $L$ cuando $x$ tiende a aproximarse con valores mayores que $x_o$

### *Límite por la izquierda*

Sea una función definida en el intervalo abierto $(a, x_o)$, el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $x_o$, por la izquierda es $L$ y se representa:

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

Lo anterior denota que $f(x)$ se aproxima a $L$ cuando $x$ tiende a aproximarse con valores menores que $x_o$

### *Teorema*

El límite cuando $x \to x_o$ de una función $f(x)$, existe y es igual a $L$, si y solo si los límites laterales son iguales a $L$, es decir

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = L$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 1

Determina el $\lim_{x \to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x<2 \\ 5-x^2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

**Solución**

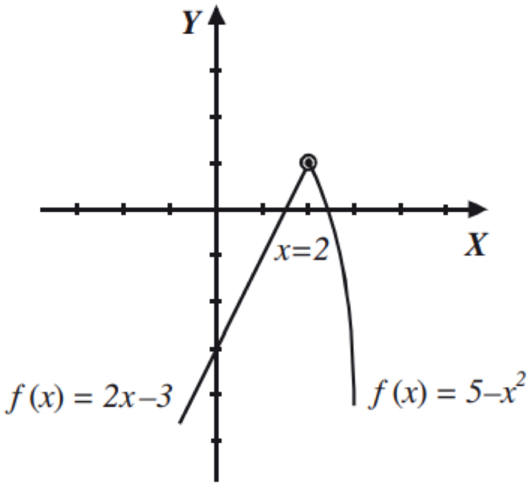
Se calculan los límites laterales:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 3) = 2(2) - 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5 - x^2) = 5 - (2)^2 = 5 - 4 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

Por consiguiente el $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$




FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 2

Calcula el $\lim_{x \to 0} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

**Solución**

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (0)^2} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x + 1) = 2(0) + 1 = 1$$

Dado que, $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces el $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

La existencia de un límite lateral no implica la existencia del otro (ejemplo anterior). Cuando $f(x)$ está definida de un solo lado, entonces el $\lim_{x \to x_o} f(x)$ es igual al límite lateral de dicho lado.

# Ejemplo 3

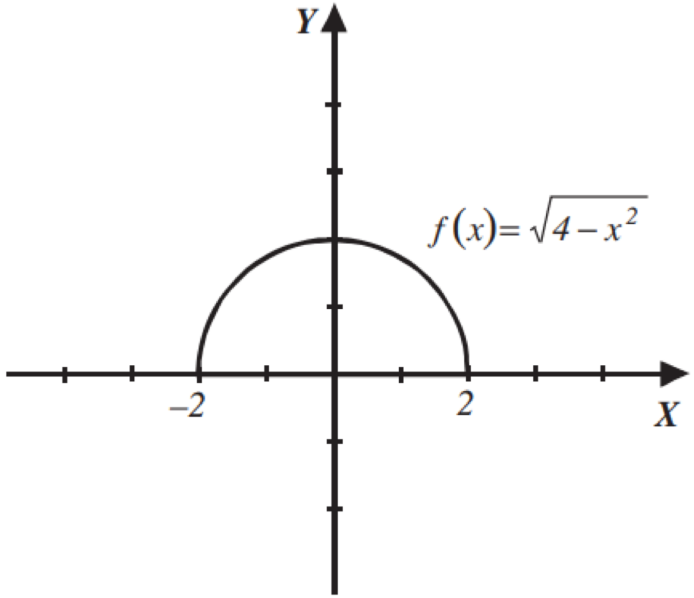
¿Cuál es el $\lim_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ?

**Solución**

Esta función está definida en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$, por tanto, los valores de $x$ tienden únicamente a 2 por la izquierda, entonces el valor del límite es:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$$




FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Límites de funciones trigonométricas

A continuación se muestra la tabla de valores de las funciones trigonométricas de los ángulos notables, así como los ángulos de $0$, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$ y $2\pi$

| Ángulos en radianes | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Seno | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| Coseno | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| Tangente | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | No existe | $0$ | No existe | $0$ |
| Cotangente | No existe | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | No existe | $0$ | No existe |
| Secante | $1$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | No existe | $-1$ | No existe | $1$ |
| Cosecante | No existe | $2$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | No existe | $-1$ | No existe |

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 1 y 2

Encuentra el valor del $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x$

**Solución**

Se sustituye el valor de $x = \dfrac{\pi}{4}$ en la función:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1 + x}$?

**Solución**

Al sustituir $x = 0$, se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1 + x} = \frac{\operatorname{sen}\ 2(0) - 3\cos 2(0)}{1 + 0} = \frac{\operatorname{sen} 0 - 3\cos 0}{1} = \frac{0 - 3(1)}{1} = -3$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x}{1 + x} = -3$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 3

Obtén $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1}$

**Solución**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan\frac{x}{2} - \cos 2x}{\operatorname{sen} x + 1} = \frac{\tan\frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \cos\pi}{1+1} = \frac{1-(-1)}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Por consiguiente, el valor del límite es 1.

# Límites trigonométricos indeterminados

Para evitar la indeterminación en un límite de funciones trigonométricas, se transforma la función utilizando identidades trigonométricas, en ocasiones con esto es suficiente, también se puede simplificar hasta obtener una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \frac{1-\cos x}{x} \quad \text{o} \quad \frac{\cos x - 1}{x}$$

y utilizar los siguientes teoremas:

$$\lim_{v \to 0} \frac{\operatorname{sen} v}{v} = 1; \quad \lim_{v \to 0} \frac{1-\cos v}{v} = \lim_{v \to 0} \frac{\cos v - 1}{v} = 0$$

A continuación se da una lista de las identidades que se pueden utilizar.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

A continuación se da una lista de las identidades que se pueden utilizar.

**Identidades trigonométricas fundamentales**

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha \csc\alpha = 1 \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha} \\[2ex] \csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \end{cases}$$

$$\cos\alpha \sec\alpha = 1 \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} \\[2ex] \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\tan\alpha \cot\alpha = 1 \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} \\[2ex] \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \begin{cases} \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\[2ex] \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \end{cases}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

**Funciones del ángulo doble**

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \operatorname{sen}^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

**Funciones de suma o diferencia de ángulos**

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

**Transformaciones de sumas o restas de funciones trigonométricas a producto**

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

# Ejemplo 1

Determina el $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$

**Solución**

Se sustituye $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ , resultando:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{1 - \tan\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1 - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación, se aplican las identidades trigonométricas con el fin de obtener una expresión equivalente que no se indetermine:

$$\frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \frac{\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{-\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{-\cos\theta(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)} = -\frac{1}{\cos\theta}$$

Se calcula el valor del límite:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \left( -\frac{1}{\cos\theta} \right) = \frac{-1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Por consiguiente, $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = -\sqrt{2}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 2

Calcula el $\lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w}$

**Solución**

Al evaluar el límite:

$$\lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w} = \frac{\cos 0 - \cos 2(0)}{\operatorname{sen}^2(0)} = \frac{1-1}{(0)^2} = \frac{0}{0}$$

Se indetermina la función, por consiguiente, se transforma mediante identidades trigonométricas, como se ilustra:

$$\lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos 2w}{\operatorname{sen}^2 w} = \lim_{w \to 0} \frac{\cos w - (\cos^2 w - \operatorname{sen}^2 w)}{\operatorname{sen}^2 w} = \lim_{w \to 0} \frac{\cos w - \cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w}$$

$$= \lim_{w \to 0} \left[ \frac{\cos w\,(1 - \cos w) + \operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w} \right] = \lim_{w \to 0} \left[ \frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{\operatorname{sen}^2 w} + \frac{\operatorname{sen}^2 w}{\operatorname{sen}^2 w} \right] \lim_{w \to 0} \left[ \frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{1 - \cos^2 w} + 1 \right]$$

$$= \lim_{w \to 0} \left[ \frac{\cos w\,(1 - \cos w)}{(1 + \cos w)(1 - \cos w)} + 1 \right] = \lim_{w \to 0} \left[ \frac{\cos w}{1 + \cos w} + 1 \right]$$

Se aplica el límite:

$$= \lim_{w \to 0} \left[ \frac{\cos w}{1 + \cos w} + 1 \right] = \frac{\cos 0}{1 + \cos 0} + 1 = \frac{1}{1+1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Finalmente, el valor del límite es $\frac{3}{2}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 3

Obtén el $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 3x}{x}$

**Solución**

Para que $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 3x}{x}$ adopte la forma $\lim_{v \to 0} \frac{\operatorname{sen} v}{v}$, se multiplica por 3 tanto el numerador como el denominador

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 3x}{x} \cdot \frac{3}{3} = \lim_{x \to 0} \frac{6 \operatorname{sen} 3x}{3x} = 6 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 6(1) = 6$$

Por tanto, $\lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} 3x}{x} = 6$

# Ejemplo 4

¿Cuál es el valor del $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos ay-\cos by}{y^2}$?

**Solución**

Se sustituye $y = 0$ en la función:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\frac{\cos a(0)-\cos b(0)}{(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la diferencia de cosenos en producto,

$$\cos ay-\cos by=-2\operatorname{sen}\left(\frac{ay+by}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{ay-by}{2}\right)=-2\operatorname{sen}\frac{(a+b)y}{2}\operatorname{sen}\frac{(a-b)y}{2}$$

Entonces:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\frac{(a+b)y}{2}\operatorname{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y^2}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}\right]$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}$$

$$=-2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a+b)}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{y}\cdot\frac{\frac{(a-b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{(a+b)y}{2}}{\frac{(a+b)y}{2}}\cdot\frac{(a-b)}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{(a-b)y}{2}}{\frac{(a-b)y}{2}}$$

$$=\frac{-2(a+b)}{2}(1)\cdot\frac{(a-b)}{2}(1)$$

$$=\frac{-2(a^2-b^2)}{4}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

Por tanto, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos ay-\cos by}{y^2}=\dfrac{b^2-a^2}{2}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

# Ejemplo 5

Determina el valor de $\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}$

**Solución**

Se evalúa la función para $x = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+(0-1)\cos(0)}{4(0)}=\frac{1+(-1)(1)}{4(0)}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Se transforma la expresión de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1+x\cos x-\cos x}{4x}=\frac{1-\cos x+x\cos x}{4x}&=\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\frac{x\cos x}{x}\right]\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left[\frac{1-\cos x}{x}+\cos x\right]\\&=\frac{1}{4}\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim_{x\to 0}\cos x\right]\\&=\frac{1}{4}[0+1]\\&=\frac{1}{4}(1)\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)\cos x}{4x}=\frac{1}{4}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

GRACIAS

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Nota: CONTRA PORTADA