FACULTAD DE
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

FCA

CONTINUIDAD

SESIÓN 3

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Continuidad puntual

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x_o \in R$ si cumple con las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ está definida.
2. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 1

Verifica si $f(x) = x^2 - 1$ es continua en $x_o = 2$

Solución

Se deben verificar las tres condiciones:

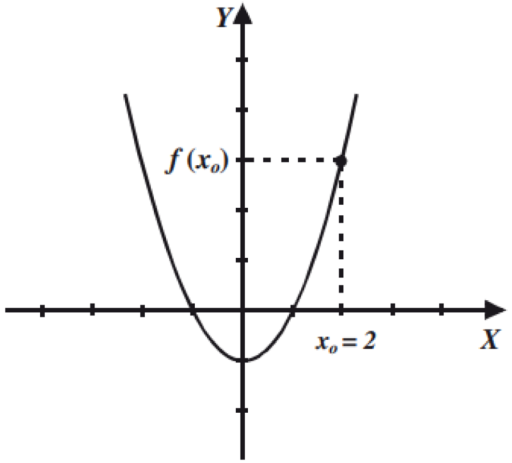
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$, por tanto $f(x)$ está definida para $x_o = 2$
2. Se calcula el valor de cada límite lateral:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = (2)^2 - 1 = 3$$

   Entonces, $\lim_{x \to 2} f(x)$ sí existe y $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

3. Como $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ y $f(2) = 3$, entonces $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 2$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 2

Determina si la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua en $x_o = 1$

Solución

Se verifican las condiciones:

1. $f(1) = -(1)$

   $f(1) = -1$, la función está definida en $x_o = 1$

2. Se determinan los límites laterales:

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$

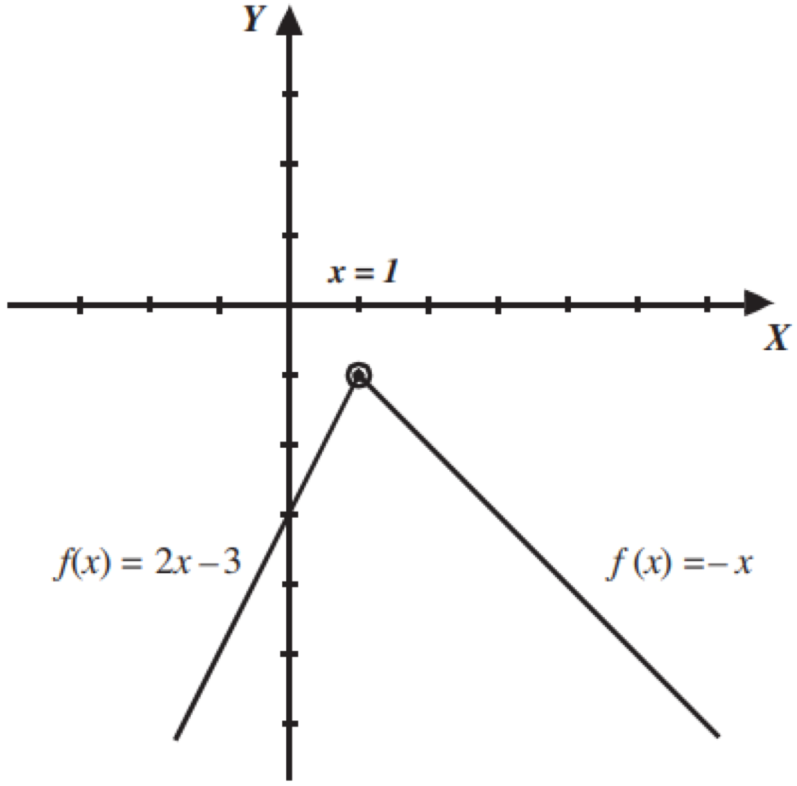
   $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x) = -(1) = -1$

   Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

3. Probar que el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

   $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = -1$

   Finalmente, es continua en $x_o = 1$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 3

Determina si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 3 & \text{si } 3 < x \end{cases}$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$

Solución

Se verifican las condiciones para los puntos $x = 1$ y $x = 3$:

1. $f(1) = (1)^2 = 1$, la función está definida en $x_o = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 3) = 2(1) - 3 = -1$;

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

   Debido a que el $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe.

   Por tanto, $f(x)$ no es continua en $x_o = 1$

   Se verifica la continuidad en $x_o = 3$

1. $f(3) = 2(3) - 3 = 3$, la función está definida en $x_o = 3$
2. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3 = 3$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 2(3) - 3 = 3$

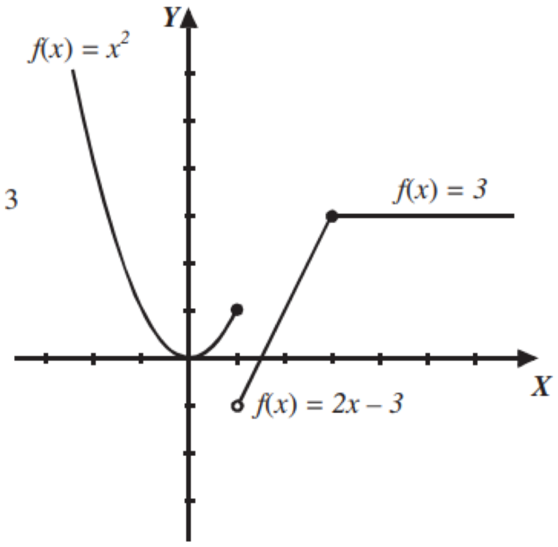
   Se concluye que,

   $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

   Entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$

3. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$ y $f(x) = 3$ entonces, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

   Por consiguiente, $f(x)$ es continua en $x_o = 3$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 4

Es continua $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si} \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x_o = \dfrac{\pi}{2}$

Solución

Si se verifican los pasos se obtiene:

1. $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en $x_o = \dfrac{\pi}{2}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Discontinuidad evitable o removible

Sea $f(x)$ una función racional no continua en $x = x_0$, si mediante una simplificación algebraica, $f(x)$ se vuelve continua en $x = x_o$, entonces recibe el nombre de discontinuidad evitable o removible.

Ejemplo 1

Verifica si es continua la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

Solución

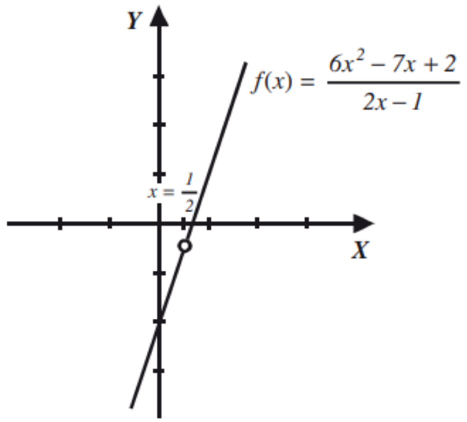
1. Se evalúa la función en $x = \dfrac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{6\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

La función se indetermina o no está definida para el valor de $x = \dfrac{1}{2}$, lo cual implica que es discontinua en este punto; sin embargo, se elimina la indeterminación mediante una simplificación algebraica.

$$f(x) = \frac{6x^2 - 7x + 2}{2x - 1} = \frac{(3x - 2)(2x - 1)}{2x - 1} = 3x - 2;\ \text{si } x \neq \frac{1}{2}$$

Esta simplificación indica que la gráfica es una línea recta con discontinuidad evitable o removible en $x = \dfrac{1}{2}$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 2

Determina si la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ es continua en $x = 3$ y traza su gráfica.

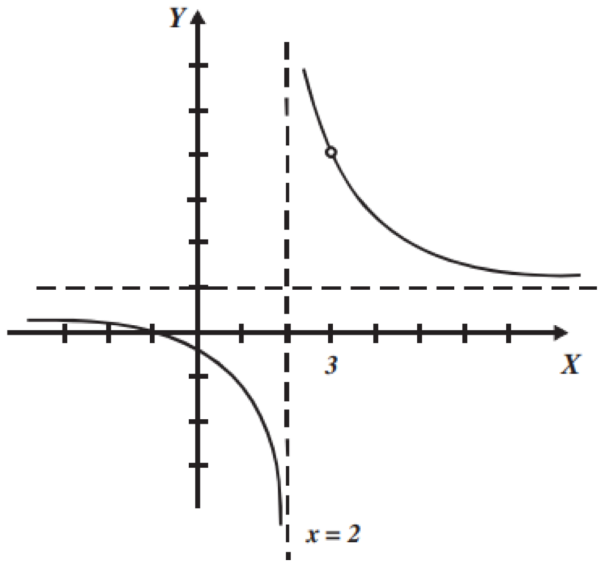
1. Se evalúa la función en $x = 3$,

$$f(3) = \frac{(3)^2 - 2(3) - 3}{(3)^2 - 5(3) + 6} = \frac{9 - 6 - 3}{9 - 15 + 6} = \frac{0}{0}$$

La función no está definida en $x = 3$, sin embargo, mediante una simplificación se puede eliminar la discontinuidad,

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}\ ,\ \text{si } x \neq 3$$

La gráfica de esta función es una hipérbola con discontinuidad evitable o removible en $x = 3$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 3

Determina el valor de k para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - k, & x < 1 \\ 2kx - 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Se obtienen los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - k) = 3(1) - k = 3 - k$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2kx - 3) = 2\text{k}(1) - 3 = 2k - 3$$

Para que el límite exista:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

entonces:

$$\begin{aligned} 3 - k &= 2k - 3 \\ -k - 2k &= -3 - 3 \\ -3k &= -6 \\ k &= \frac{-6}{-3} \\ k &= 2 \end{aligned}$$

por tanto, para que la función sea continua $k = 2$, es decir la función se debe escribir:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x < 1 \\ 4x - 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Comprobación

Probemos que la función es continua en $x = 1$

i) $f(1) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

ii) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - 2) = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x - 3) = 4(1) - 3 = 4 - 3 = 1$

$\lim_{x \to 1^{-1}} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

por tanto $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe y $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

iii) $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Por tanto $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Ejemplo 4

Determina los valores de a y b para que la función sea continua

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & x \le -2 \\ x^2 - 1 & -2 < x < 3 \\ bx + 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

Solución

Se obtienen los límites laterales en $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (ax - 3) = a(-2) - 3 = -2a - 3$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Para que el límite exista se debe cumplir:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} -2a - 3 &= 3 \\ -2a &= 3 + 3 \\ -2a &= 6 \\ a &= \frac{6}{-2} \\ a &= -3 \end{aligned}$$

Por tanto $a = -3$

Se obtienen los límites laterales en $x = 3$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (bx + 1) = b(3) + 1 = 3b + 1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 1) = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$$

entonces

$$\begin{aligned} 3b + 1 &= 8 \\ 3b &= 8 - 1 \\ 3b &= 7 \\ b &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto $b = \frac{7}{3}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Continuidad de una función en un intervalo

Continuidad por la derecha

Una función $f(x)$ es continua a la derecha de x_o si y solo si para $x \in R$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Continuidad por la izquierda

Una función $f(x)$ es continua a la izquierda de x_o si y solo si para $x \in R$:

1. $f(x_o)$ existe
2. $\lim_{x \to x_o^-} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$

Continuidad de una función en un intervalo abierto

Se dice que $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) si y solo si es continua en todos los puntos del intervalo.

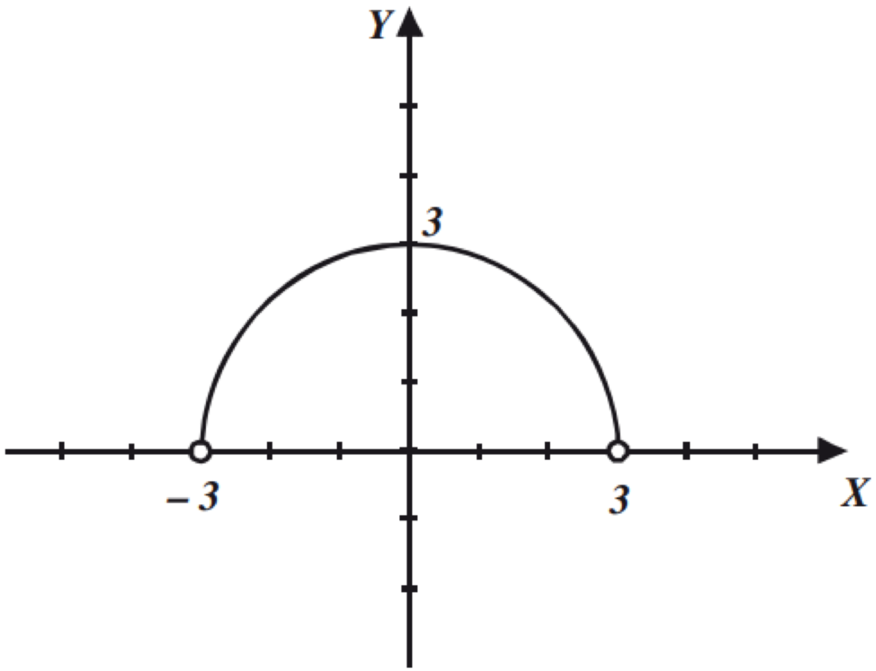
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 1

Demuestra que $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Solución

La función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ está definida en todos los puntos del intervalo $(-3, 3)$, como se ilustra en la gráfica, por consiguiente, $f(x)$ es continua en dicho intervalo.



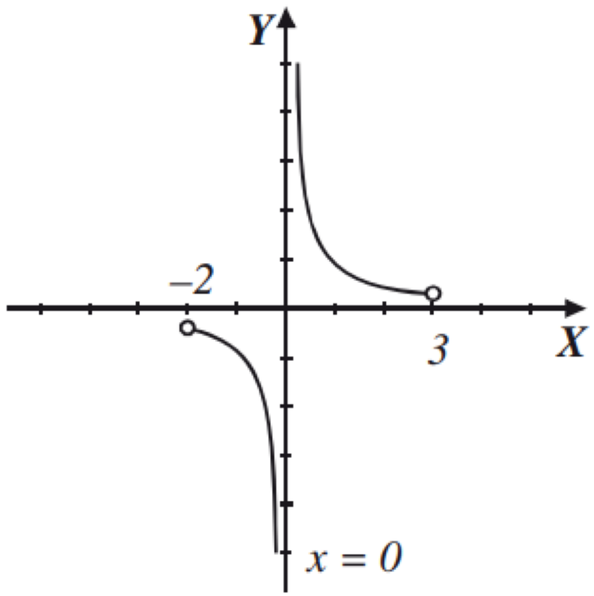
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 2

¿$f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(-2, 3)$?

Solución

$f(x)$ no está definida en $x = 0$; entonces no es continua en este punto, por tanto, no es continua en el intervalo $(-2, 3)$



Continuidad en un intervalo cerrado

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b) y además

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Ejemplo 1

Demuestra que $f(x) = x^2 - 2x$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

Demostración

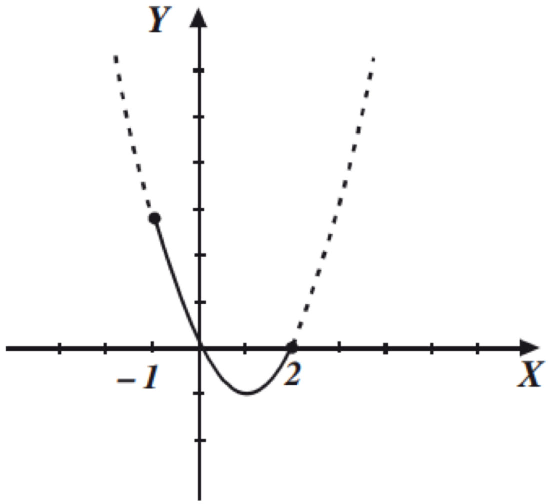
La función $f(x)$ es polinomial, lo cual implica que está definida en el intervalo abierto $(-1, 2)$, por tanto, es continua en el intervalo, ahora se prueba la continuidad en los extremos del intervalo.

Para $x = -1$

a) $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 - 2x) = 3$

c) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$



Para $x = 2$

a) $f(2) = (2)^2 - 2(2) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 2x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$

$f(x)$ es continua en el intervalo abierto $(-1, 2)$ y es continua a la derecha de -1 y a la izquierda de 2, entonces $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Ejemplo 2

¿La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-2, 3]$?

Solución

Del intervalo $(-2, 3)$ la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, ya que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

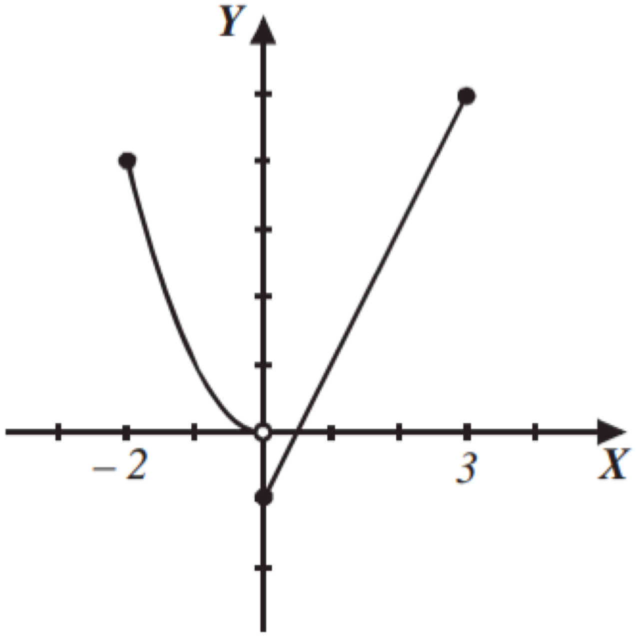
Por tanto, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Si $f(x)$ no es continua en el intervalo abierto

$$(-2, 3)$$

Entonces, no es continua en el intervalo cerrado

$$[-2, 3]$$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 3

¿La función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 + x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$?

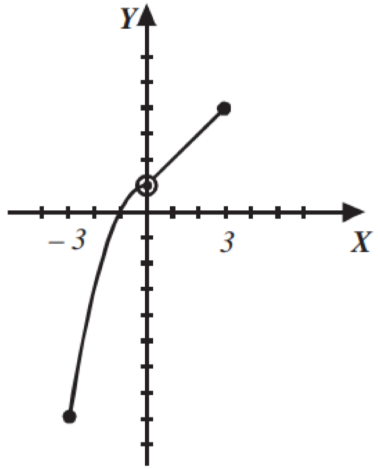
Solución

Se prueba la continuidad de la función en $x = 0$

1. $f(0) = 1 - (0)^2 = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 + (0) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 - (0)^2 = 1$

3. $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$



La función es continua en el intervalo $(-3, 3)$

Ahora se prueba la continuidad en los extremos:

Para $x = -3$

1. $f(-3) = 1 - (-3)^2 = 1 - 9 = -8$

2. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 1 - (3)^2 = 1 - 9 = -8$

3. $f(-3) = \lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

Para $x = 3$

1. $f(3) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$

2. $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 1 + 3 = 1 + 3 = 4$

3. $f(3) = \lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

La función es continua en $(-3, 3)$ y además es continua a la derecha de -3 y a la izquierda de 3, por tanto, es continua en el intervalo $[-3, 3]$

Continuidad en un intervalo semiabierto

Para intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se tiene que:

1. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $(a, b]$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
2. Una función $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto $[a, b)$ si es continua en el intervalo abierto (a, b), y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 1

Demuestra que $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ es continua en el intervalo semiabierto (3, 6]

Demostración

El dominio de la función se define $D_f = \{x \in R \mid x \neq 3\}$, por tanto $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (3, 6)

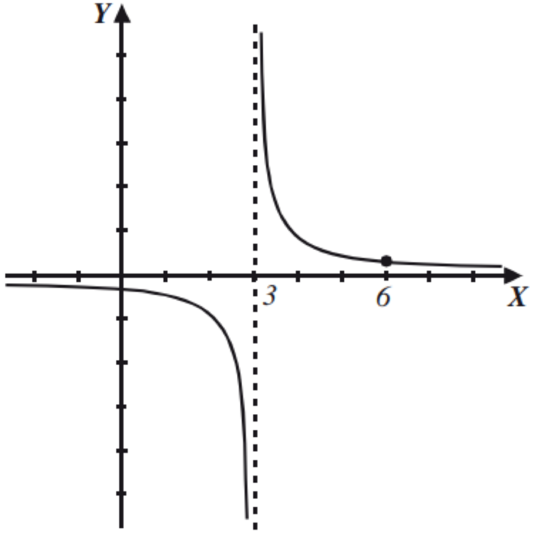
Se verifica la continuidad por la izquierda en 6

a) $f(6) = \dfrac{2}{6-3} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} \left(\dfrac{2}{x-3} \right) = \dfrac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = f(6)$

Entonces, $f(x)$ es continua en el intervalo semiabierto (3, 6]



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 2

¿La función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$ es continua en el intervalo semiabierto $(-1, 3]$?

Solución

Se verifica la continuidad en $x = 2$

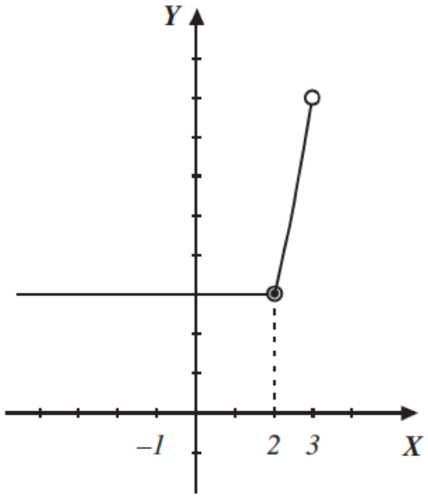
1. $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$
2. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$,

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

3. $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$, la función es continua en $(-1, 3)$

Se prueba la continuidad por la izquierda en $x = 3$

1. $f(3)$ no está definida, por tanto, la función no es continua en el intervalo $(-1, 3]$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Ejemplo 1

Verifica la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -x^2 + 4x & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}$ en $[-2, 4)$

Solución

Se verifica la continuidad en $x = 0$

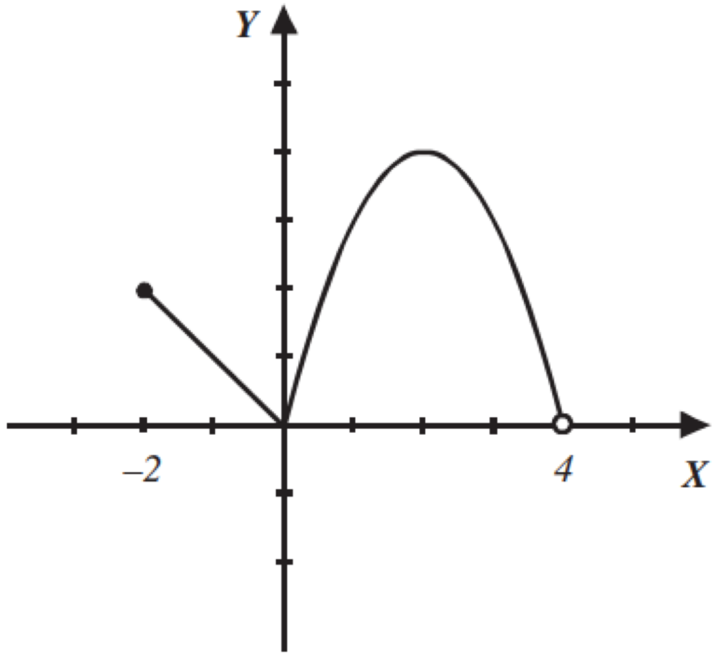
1. $f(0) = -(0) = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0, \ \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + 4x) = 0$
3. Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

La función es continua en el intervalo $(-2, 4)$

Se prueba la continuidad por la derecha para $x = -2$

1. $f(-2) = -(-2) = 2$
2. $\lim\limits_{x \to -2^+} (-x) = -(-2) = 2$
3. $f(-2) = \lim\limits_{x \to -2^+} (-x)$

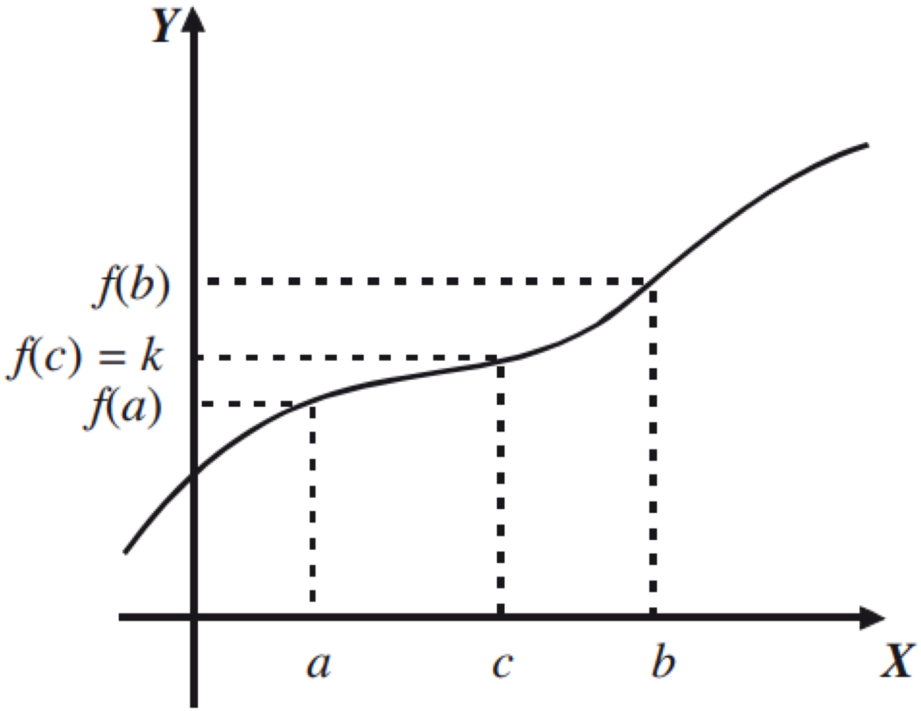
Por tanto, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 4)$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Teorema del valor intermedio

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$, y k un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Ejemplo 1

Si $f(x) = 3x - 2$ es una función definida en el intervalo $[-2, 3]$, obtén el valor de c que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $k = 1$

Solución

Al aplicar el teorema se obtiene:

$$f(c) = k \rightarrow 3c - 2 = 1 \rightarrow 3c = 3 \rightarrow c = 1$$

Por consiguiente, $c = 1$ cuando $k = 1$

Ejemplo 2

Dada la función $g(x) = x^2 - 3x - 2$, definida en el intervalo $[1, 4]$, determina el valor de k que cumpla con el teorema del valor intermedio cuando $c = 3$

Solución

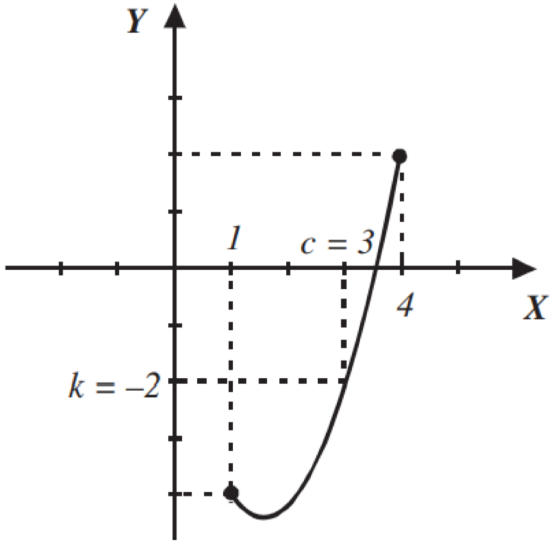
Se aplica el teorema:

$$f(c) = k \rightarrow c^2 - 3c - 2 = \mathrm{k}$$

Pero, $c = 3$ y al sustituir se obtiene el valor de k

$$(3)^2 - 3(3) - 2 = k \rightarrow k = -2$$

entonces, $k = -2$



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

GRACIAS

FACULTAD DE
CONTADURÍA Y
ADMINISTRACIÓN
FCA