FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

FCA

LA DERIVADA

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

Definición

Sea $f(x)$ una función, se define a su derivada $f'(x)$, como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para toda x, siempre que el límite exista y se representa por:

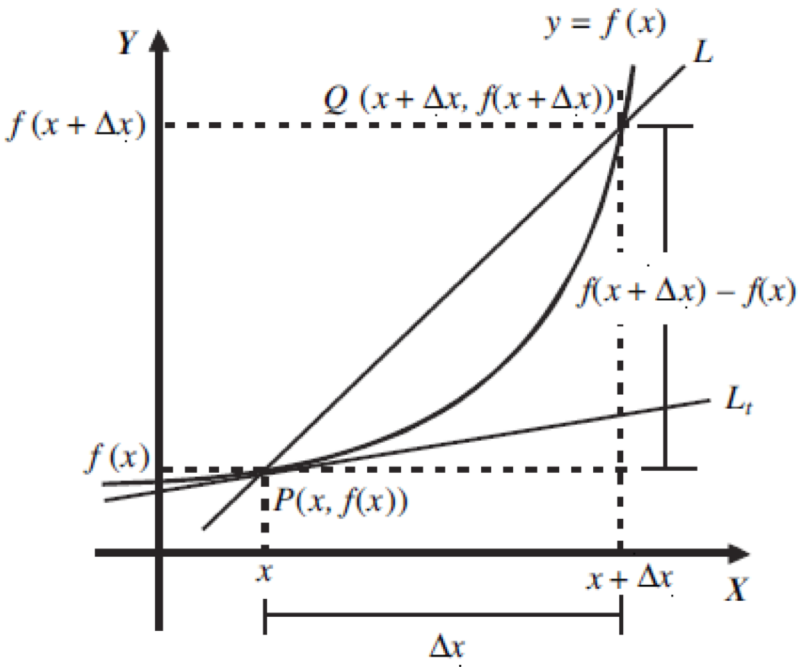
$$y',\, f'(x),\, \frac{dy}{dx} \text{ o } D_x y$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El valor de la derivada en cualquier punto de la curva es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto. Donde:

Δx: incremento en x

Δy: incremento en y



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

En la gráfica se observa que la pendiente de la recta L es:

$$m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si Δx tiende a cero, la recta L coincide con L_t, entonces la pendiente de L_t será el límite de m_t.

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Por definición, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Regla de los cuatro pasos

Sea una función $y = f(x)$, entonces:

1. $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

2. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (razón de cambio)

4. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (derivada de la función)

EJERCICIO 1

Encuentra la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$

Solución

Se aplica la regla de los cuatro pasos y se obtiene:

1. $y + \Delta y = 5(x + \Delta x) - 6$

2. $\Delta y = (5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(5x + 5\Delta x - 6) - (5x - 6)}{\Delta x} = \dfrac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \dfrac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5$ (derivada de la función)

Este resultado se obtiene también cuando se utiliza la definición, como sigue:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[5(x + \Delta x) - 6] - (5x - 6)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - 6 - 5x + 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (5) = 5$$

Por tanto, la derivada de la función $f(x) = 5x - 6$ es: $f'(x) = 5$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 2

Aplica la definición y determina la derivada de $y = 7x^2 - 5x + 9$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7(x+\Delta x)^2 - 5(x+\Delta x) + 9] - (7x^2 - 5x + 9)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7x^2 + 14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5x - 5\Delta x + 9 - 7x^2 + 5x - 9}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14x\Delta x + 7\Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14x + 7\Delta x - 5) = 14x - 5$$

Por consiguiente, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = 14x - 5$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 3

Encuentra la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$, aplica la definición.

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+5} - \dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{2x+2\Delta x-1}{x+\Delta x+5} - \dfrac{2x-1}{x+5}}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(x+5)(2x+2\Delta x-1)-(2x-1)(x+\Delta x+5)}{(x+\Delta x+5)(x+5)}}{\Delta x} \quad \text{al simplificar,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x+5)(x+5)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11}{(x+\Delta x+5)(x+5)} \quad \text{se resuelve el límite}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{11}{(x+5)^2}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 4

¿Cuál es la derivada de la función $y = \sqrt{x+2}$?

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x}$$ se racionaliza la expresión

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} - \sqrt{x+2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+2}\right)^2 - \left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x+2-x-2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2} + \sqrt{x+2}}$$

De tal manera que, al resolver el límite se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

Fórmulas para determinar la derivada de una función algebraica

La forma directa de obtener la derivada de una función algebraica es la aplicación de las siguientes fórmulas:

1. $\frac{d}{dx}c = 0$

2. $\frac{d}{dx}x = 1$

3. $\frac{d}{dx}cv = c\frac{dv}{dx}$

4. $\frac{d\left(u+v-w\right)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$

5. $\frac{d\,(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$

6. $\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

7. $\frac{d}{dx}\sqrt[n]{v} = \frac{1}{n\sqrt[n]{v^{n-1}}}\frac{dv}{dx}$

8. $\frac{d}{dx}\sqrt{v} = \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dx}$

9. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

10. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

11. $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = -\frac{c}{v^2}\frac{dv}{dx}$

12. $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{dv}{dx}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 5

¿Cuál es la derivada de la función $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$?

Solución

Al aplicar las fórmulas respectivas se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 - 4x + 5) &= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) - \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(5)\\ &= \frac{d}{dx}(x^3) + 2\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)\\ &= 3x^2 + 2(2x) - 4(1) = 3x^2 + 4x - 4\end{aligned}$$

EJERCICIO 6

Deriva la función $y = \sqrt[3]{x^2}$

Solución

Aplicamos el hecho de que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ y posteriormente $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 7

Calcula la derivada de la función $s = \dfrac{1}{\sqrt[5]{t}}$

Solución

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{t}}\right) = \frac{d}{dt}\left(t^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{1}{5}t^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}t^{-\frac{6}{5}} = -\frac{1}{5t^{\frac{6}{5}}} = -\frac{1}{5\sqrt[5]{t^6}}$$

pero $\sqrt[5]{t^6} = \sqrt[5]{t^5 \cdot t} = t\sqrt[5]{t}$, por tanto $\dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{1}{5t\sqrt[5]{t}}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 8

Obtén la derivada de la función $y = \dfrac{4}{x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{d}{dx}(4x^{-1}) = 4\frac{d}{dx}(x^{-1}) = 4(-1x^{-1-1}) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2}$$

EJERCICIO 9

Determina la derivada de la función $y = 2\sqrt[3]{x} - \dfrac{7}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{3}} - 7x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(2\,x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{d}{dx}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - 7\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right) - 7\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7}{2x\sqrt{x}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 10

¿Cuál es la derivada de la función $y = (3x^2 - x)^7$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d(v^n)}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$ y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - x) = 7(3x^2 - x)^6 \cdot \left(\frac{d3x^2}{dx} - \frac{dx}{dx}\right) = 7(3x^2 - x)^6(6x - 1)$$

$$= (42x - 7)(3x^2 - x)^6$$

EJERCICIO 11

Encuentra la derivada de la función $s = \sqrt[3]{8 + 4t - t^3}$

Solución

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(8+4t-t^3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(8+4t-t^3)^{\frac{1}{3}-1} \cdot \frac{d}{dt}(8+4t-t^3) = \frac{1}{3}(8+4t-t^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4-3t^2)$$

$$= \frac{4-3t^2}{3(8+4t-t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4-3t^2}{3\sqrt[3]{(8+4t-t^3)^2}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 12

Deriva la función $y = -\dfrac{5}{\left(\sqrt{x} - x\right)^3}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{5}{\left(\sqrt{x}-x\right)^3}\right] = \frac{d}{dx}\left[-5\left(\sqrt{x}-x\right)^{-3}\right] = -5\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-x\right)^{-3}$$

$$= -5\left[-3\left(\sqrt{x}-x\right)^{-4} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}-x\right)\right]$$

$$= 15\,\left(\sqrt{x}-x\right)^{-4} \cdot \left(\frac{d}{dx}\sqrt{x} - \frac{d}{dx}x\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x}-x\right)^4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)$$

$$= \frac{15}{\left(\sqrt{x}-x\right)^4}\left(\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{15\left(1-2\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\,\left(\sqrt{x}-x\right)^4}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 13

Calcula la derivada de la función $y = x\sqrt{x+1}$

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x+1}\right) = x\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} + \sqrt{x\ +1}\,\frac{dx}{dx} = x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) + \sqrt{x+1} = \frac{x}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}$$

$$= \frac{x+2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{x+2x+2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

Por consiguiente, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 14

Obtén la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{1 - 3x^2}$

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ y se obtiene:

$$f'(x) = \frac{(1-3x^2)(2x)-(x^2-5)(-6x)}{(1-3x^2)^2} = \frac{2x-6x^3+6x^3-30x}{(1-3x^2)^2} = -\frac{28x}{(1-3x^2)^2}$$

REGLA DE LA CADENA

Sea $y = g(u)$, $u = f(x)$, entonces la derivada de $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, se define:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{d}{dx} g(f(x)) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

EJERCICIO 15

Encuentra $\frac{dy}{dx}$ si $y = u^2 - 9$; $u = x^2 + 1$

Solución

Por definición $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, entonces $\frac{dy}{du} = 2u$ y $\frac{du}{dx} = 2x$, por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u)(2x) = 4ux = 4(x^2 + 1)x = 4x(x^2 + 1)$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 16

Obtén $\dfrac{d}{dx}(y \circ u \circ v)$, si $y = u^3, u = \dfrac{v-1}{v+1}, v = \sqrt{x^2-1}$

Solución

Cuando hay más de dos funciones, la derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Luego:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \ \frac{du}{dv} = \frac{2}{(v+1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Por consiguiente, el resultado es:

$$\frac{d}{dx}(y \circ u \circ v) = \left[3u^2\right]\left[\frac{2}{(v+1)^2}\right]\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right] = \frac{6u^2x}{(v+1)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{6\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2 x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^4\sqrt{x^2-1}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 17

Deriva la función $y=\sqrt[3]{x^3-2x^2+8}$, utilizando la regla de la cadena.

Solución

Al tomar $u=x^3-2x^2+8$, entonces $y=\sqrt[3]{u}$, luego:

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}=3x^2-4x$$

Al utilizar la regla de la cadena, se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\right]\left[3x^2-4x\right]=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{u^2}}=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2+8)^2}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} v = \cos v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\csc v = -\csc v \cot v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cos v = -\operatorname{sen} v \frac{dv}{dx}$$

$$\text{con } v = x^2 - 1$$

EJERCICIO 18

Determina la derivada de las siguientes funciones:

$$y = \text{sen } 5x^2,\ y = \tan 6x,\ y = \csc 4x^3$$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\text{sen } 5x^2 = \cos 5x^2\left(\frac{d}{dx}5x^2\right) = \cos 5x^2(10x) = 10x\cos 5x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan 6x = \sec^2 6x\left(\frac{d}{dx}6x\right)\sec^2 6x(6) = 6\sec^2 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\csc 4x^3 = -\csc 4x^3\cot 4x^3\left(\frac{d}{dx}4x^3\right) = -\csc 4x^3\cot 4x^3(12x^2) = -12x^2\csc 4x^3\cot 4x^3$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 19

Deriva la función $y = 4\cos(x^2 - 1)$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}4\cos(x^2 - 1) = 4\frac{d\cos(x^2 - 1)}{dx} = 4\left[-\operatorname{sen}(x^2 - 1)\frac{d(x^2 - 1)}{dx}\right] = -4\operatorname{sen}(x^2 - 1)\cdot 2x$$

por tanto, $\dfrac{dy}{dx} = -8x \cdot \operatorname{sen}(x^2 - 1)$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 20

Encuentra la derivada de la función $y = \dfrac{\text{sen}\, x - \cos\, x}{\text{sen}\, x + \cos\, x}$

Solución

Primero se aplica la fórmula del cociente de funciones:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\text{sen}\, x+\cos\, x)\dfrac{d(\text{sen}\, x-\cos\, x)}{dx}-(\text{sen}\, x-\cos\, x)\dfrac{d(\text{sen}\, x+\cos\, x)}{dx}}{(\text{sen}\, x+\cos\, x)^2}$$

Se derivan las funciones con las fórmulas para la función seno y coseno:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\text{sen}\, x+\cos\, x)\left[\dfrac{d\,\text{sen}\, x}{dx}-\dfrac{d\cos\, x}{dx}\right]-(\text{sen}\, x-\cos\, x)\left[\dfrac{d\,\text{sen}\, x}{dx}+\dfrac{d\cos\, x}{dx}\right]}{(\text{sen}\, x+\cos\, x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\text{sen}\, x+\cos x)(\cos x+\text{sen}\, x)-(\text{sen}\, x-\cos x)(\cos x-\text{sen}\, x)}{(\text{sen}\, x+\cos\, x)^2}=\frac{(\text{sen}\, x+\cos\, x)^2+(\cos x-\text{sen}\, x)^2}{(\text{sen}\, x+\cos\, x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{sen}^2\, x+2\,\text{sen}\, x\cos x+\cos^2\, x+\cos^2\, x-2\,\text{sen}\, x\cos x+\text{sen}^2\, x}{(\text{sen}\, x+\cos\, x)^2}=\frac{2(\text{sen}^2 x+\cos^2 x)}{(\text{sen}\, x+\cos\, x)^2}$$

Se aplica la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{(\text{sen}\, x+\cos\, x)^2}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 21

Determina la derivada de la función $r = \tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$

Solución

Se expresa $\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) = \left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3$ y se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}v^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d\tan^3\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta} = \frac{d\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^3}{d\theta} = 3\left[\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\right]^2 \cdot \frac{d\tan\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

Se deriva la tangente con la fórmula $\frac{d}{dx}\tan v = \sec^2 v\frac{dv}{dx}$ y se simplifican los resultados:

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\ \tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \frac{d\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)}{d\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\theta}} - 1\right) = 3\tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)\left(\frac{1 - 2\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \left(\frac{3 - 6\sqrt{\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right) \cdot \tan^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right) \cdot \sec^2\left(\sqrt{\theta} - \theta\right)$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 22

Deriva la función $s = \cos 2t \cdot \operatorname{sen} 4t$

Solución

Se aplica la fórmula para derivar un producto $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(\cos 2t \operatorname{sen} 4t)}{dt} = \cos 2t \cdot \frac{d \operatorname{sen} 4t}{dt} + \operatorname{sen} 4t \cdot \frac{d \cos 2t}{dt}$$

Se deriva el seno y coseno con sus respectivas fórmulas y se obtiene el resultado:

$$\frac{ds}{dt} = \cos 2t \cdot \left[\cos 4t \frac{d(4t)}{dt}\right] + \operatorname{sen} 4t \cdot \left[-\operatorname{sen} 2t \frac{d(2t)}{dt}\right] = \cos 2t\ [4 \cos 4t] + \operatorname{sen} 4t\ [-2 \operatorname{sen} 2t]$$

$$\frac{ds}{dt} = 4 \cos 2t \cos 4t - 2 \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} 4t$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 23

¿Cuál es la derivada de la función $y = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\dfrac{d(1)}{dx} - 1\dfrac{d\sqrt{\operatorname{sen} x}}{dx}}{\left(\sqrt{\operatorname{sen} x}\right)^2}$$

Se realizan las respectivas derivadas:

$$\frac{d(1)}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\sqrt{\operatorname{sen} x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}(\cos x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

Se sustituyen y se obtiene como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\,(0) - 1\left(\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right)}{\operatorname{sen} x} = \frac{\dfrac{-\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1}} = -\frac{\cos x}{2 \operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

DERIVADAS DE FUNCIONES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}\text{arc sen } v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc cos } v = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc tan } v = \frac{1}{1+v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc cot } v = -\frac{1}{1+v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc sec } v = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{arc csc } v = -\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}} \cdot \frac{dv}{dx}$$

EJERCICIO 24

Deriva la función $y = \text{arc sen } x^2$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(\text{arc sen } v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{arc sen } x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \frac{d\,(x^2)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Por consiguiente, la derivada de la función es $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 25

¿Cuál es la derivada de la función $y = \arctan\left(\sqrt{x}-1\right)$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}(\arctan v) = \frac{1}{v^2+1} \cdot \frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\arctan\left(\sqrt{x}-1\right) = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1} \cdot \frac{d\left(\sqrt{x}-1\right)}{dx} = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1\right]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left[x-2\sqrt{x}+2\right]}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 26

Obtén la derivada de la función $r = \theta^2 \operatorname{arc\,sec} \theta$

Solución

$$\frac{dr}{d\theta} = \theta^2 \frac{d}{d\theta} \operatorname{arc\,sec}\ \theta + \operatorname{arc\,sec}\ \theta \frac{d\theta^2}{d\theta} = \theta^2 \left[\frac{1}{\theta\sqrt{\theta^2 - 1}} \frac{d\theta}{d\theta} \right] + \operatorname{arc\,sec}\ \theta(2\theta)$$

$$= \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 - 1}} + 2\theta \operatorname{arc\,sec} \theta$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 27

Determina la derivada de la función $y = \dfrac{\text{arc sen } x}{x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\dfrac{d}{dx}(\text{arc sen } x) - (\text{arc sen } x)\dfrac{dx}{dx}}{x^2} = \frac{x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{dx}{dx}\right) - \text{arc sen } x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{arc sen } x}{x^2} = \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arc sen } x}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\text{arc sen } x}{x^2}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

$$\frac{d}{dx}e^{v} = e^{v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}a^{v} = a^{v} \ln a \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}u^{v} = v \cdot u^{v-1} \frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^{v} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\ln v = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\log_b v = \frac{\log_b e}{v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

A continuación se enlistan las propiedades de los logaritmos, las cuales, al aplicarlas, simplifican la función al momento de obtener su derivada.

1. $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$
2. $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$
3. $\log_a A^n = n \cdot \log_a A$
4. $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n}\log_a A$
5. $\log^n{}_a A = (\log_a A)^n$

Las propiedades anteriores también se aplican a los logaritmos naturales.

EJERCICIO 28

Obtén la derivada de $y = x^2 \ln(mx)^2$

Solución

Se utiliza la fórmula del producto $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \ln(mx)^2) = x^2 \frac{d}{dx}\ln(mx)^2 + \ln(mx)^2 \frac{d}{dx}x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2}\frac{d}{dx}(mx)^2 + \ln(mx)^2 \cdot (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{(mx)^2} \cdot 2(mx)m + 2x \ \ln(mx)^2 = 2x + 2x\ln(mx)^2$$

Utilizando $\log_a A^n = n \log_a A$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 2x(2\ln(mx)) = 2x + 4x\ln(mx) = 2x[1 + 2\ln(mx)]$$

EJERCICIO 29

Determina la derivada de la función $y = \ln(\text{sen } x)$

Solución

Se deriva la función y mediante identidades trigonométricas se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cdot\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \frac{1}{\text{sen } x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \cot x$$

Deriva $y = \ln\left(\dfrac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\right)$

EJERCICIO 30

Deriva $y = \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)$

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos se obtiene: $y = \ln(1 + \operatorname{sen} x) - \ln(1 - \operatorname{sen} x)$

Se deriva la función:

$$y' = \frac{d}{dx}\ln(1+\operatorname{sen} x) - \frac{d}{dx}\ln(1-\operatorname{sen} x) = \left(\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)\frac{d}{dx}(1+\operatorname{sen} x) - \left(\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\right)\frac{d}{dx}(1-\operatorname{sen} x)$$

$$y' = \left(\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\right)(\cos x) - \left(\frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\right)(-\cos x) = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$$

$$y' = \frac{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x) + \cos x(1-\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x + \cos x \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x \operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}$$

$$y' = \frac{2\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} = 2\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 2\sec x$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 31

¿Cuál es la derivada de la función $y = e^{2x-1}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}e^{v} = e^{v}\frac{dv}{dx}$ y se obtiene: $\frac{dy}{dx} = e^{2x-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x-1) = e^{2x-1} \cdot 2 = 2e^{2x-1}$

pero $y = e^{2x-1}$ por tanto $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x-1} = 2y$

EJERCICIO 32

Determina la derivada de la función $y = 3\sqrt{e^{\cos x}}$

Solución

La función se puede expresar como $y = 3(e^{\cos x})^{\frac{1}{2}} = 3e^{\frac{1}{2}\cos x}$, se deriva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3e^{\frac{1}{2}\cos x}\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cos x\right) = 3e^{\frac{1}{2}\cos x} \cdot \left(\frac{1}{2}(-\operatorname{sen} x)\right) = -\frac{3}{2}\operatorname{sen} x \cdot e^{\frac{1}{2}\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\operatorname{sen} x \cdot \sqrt{e^{\cos x}}$$

EJERCICIO 33

Obtén la derivada de $y = x^3 \cdot e^{\sqrt{x}}$

Solución

Se utiliza la fórmula del producto $\dfrac{duv}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 \cdot e^{\sqrt{x}}\right) = x^3\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} + e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}x^3 = x^3 \cdot e^{\sqrt{x}}\frac{d}{dx}\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}} \cdot (3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2 \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 3x^2 \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} + 6\right)$$

EJERCICIO 34

¿Cuál es la derivada de $y = 5^{x^2 + 5x - 7}$?

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}a^v = a^v \cdot \ln a \frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5^{x^2+5x-7}) = 5^{x^2+5x-7} \cdot \ln 5 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 5x - 7)$$

$$= 5^{x^2+5x-7} \cdot \ln 5 \cdot (2x + 5)$$

$$= (2x + 5) \cdot 5^{x^2+5x-7} \cdot \ln 5$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 35

Encuentra la derivada de la función $y = (\operatorname{sen} x)^{e^x}$

Solución

Se aplica la fórmula $\frac{d}{dx}u^v = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \cdot \frac{dv}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x-1}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}(\operatorname{sen} x)^{-1}(\cos x) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) + \ln(\operatorname{sen} x)\cdot(\operatorname{sen} x)^{e^x}(e^x) = e^x(\operatorname{sen} x)^{ex}\cot x + e^x(\operatorname{sen} x)e^x \ln(\operatorname{sen} x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x(\operatorname{sen} x)^{e^x}[\cot x + \ln(\operatorname{sen} x)]$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

DERIVADAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Una función implícita es una relación que se expresa en términos de x y y, por ejemplo:

$$3x^3 - y + 5x = x^2; \qquad \operatorname{sen} x = \cos(x - y); \qquad e^{x+y} = x; \qquad \ln(x + y) = \sqrt{x - y}$$

En una función implícita se derivan término a término los elementos de la igualdad respecto a la variable que se indica y al final se despeja la derivada.

EJERCICIO 36

¿Cuál es la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de la función implícita $3x^2 - 6xy + y^2 = 2x - y$?

Solución

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 6xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2x - y)$$

$$\frac{d3x^2}{dx} - \frac{d6xy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = \frac{d2x}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dx^2}{dx} - 6\frac{dxy}{dx} + \frac{dy^2}{dx} = 2\frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$3(2x) - 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 2(1) - \frac{dy}{dx}$$

$$6x - 6x\frac{dy}{dx} - 6y + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

Se agrupan los términos que contienen $\dfrac{dy}{dx}$, y se despeja:

$$-6x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx}(-6x + 2y + 1) = 2 + 6y - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 6x + 6y}{1 - 6x + 2y}$$

Por lo regular, el resultado de la derivada de una función implícita se expresa en términos tanto de x como de y.

Es común que en algunos casos la expresión $\dfrac{dy}{dx}$ se represente como y'.

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 37

Determina la derivada y' de la función $\sqrt{x+y} = x - y$

Solución

Al derivar ambos miembros de la igualdad se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x+y} = \frac{d}{dx}(x-y) \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{d}{dx}(x+y)}{2\sqrt{x+y}} = \frac{dx}{dx} - \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x+y}} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

Se despeja y' de la igualdad $\frac{1+y'}{2\sqrt{x+y}} = 1 - y'$, y el resultado es:

$$1 + y' = 2\sqrt{x+y} - 2y'\sqrt{x+y} \quad \rightarrow \quad y' + 2y'\sqrt{x+y} = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y'\left(1 + 2\sqrt{x+y}\right) = 2\sqrt{x+y} - 1$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x+y} - 1}{1 + 2\sqrt{x+y}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 38

Obtén la derivada y' de la función $y = e^{x+y}$

Solución

Se derivan ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+y} \cdot \frac{d}{dx}(x+y) \quad \rightarrow \quad y' = e^{x+y}(1+y')$$

Se despeja y' de la igualdad:

$$y' = e^{x+y} + y'e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y' - y'e^{x+y} = e^{x+y} \quad \rightarrow \quad y'(1 - e^{x+y}) = e^{x+y}$$

Donde:

$$y' = \frac{e^{x+y}}{1-e^{x+y}} \quad \text{o} \quad y' = \frac{y}{1-y}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 39

Encuentra la derivada y' de la función implícita $\operatorname{sen}(x+y)=x$

Solución

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x+y)=\frac{dx}{dx} \quad \rightarrow \quad \cos(x+y)(1+y')=1 \quad \rightarrow \quad \cos(x+y)+y'\cos(x+y)=1$$

$$y'\cos(x+y)=1-\cos(x+y)$$

Donde, la derivada

$$y'=\frac{1-\cos(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{1}{\cos(x+y)}-\frac{\cos(x+y)}{\cos(x+y)}=\sec(x+y)-1$$

EJERCICIO 40

Obtén la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función implícita $x - \ln y = \ln x$

Solución

$$\frac{d}{dx}(x - \ln y) = \frac{d}{dx}(\ln x) \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dx} - \frac{d \ln y}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x}$$

Se despeja la derivada de la igualdad:

$$-\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} - 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1-x}{x} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{xy - y}{x}$$

EJERCICIO 41

Determina la derivada respecto a x de la función $\cos(x + y) = \operatorname{sen}(x - y)$

Solución

$$\frac{d}{dx}\cos(x+y) = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x-y)$$

$$-\operatorname{sen}(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) = \cos(x-y)\frac{d}{dx}(x-y)$$

$$-\operatorname{sen}(x+y)\cdot(1+y') = \cos(x-y)\cdot(1-y')$$

$$-\operatorname{sen}(x+y) - y'\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x-y) - y'\cos(x-y)$$

Se despeja la derivada:

$$y'\cos(x-y) - y'\operatorname{sen}(x+y) = \cos(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$$

$$y'[\cos(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)] = \cos(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$$

$$y' = \frac{\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 42

Encuentra la derivada de la siguiente función implícita $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2a$

Solución

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(2a) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Las derivadas de orden superior se obtienen al derivar una función $y = f(x)$, tantas veces como lo indique el orden requerido.

La derivada de una función se llama primera derivada y se denota con $y' = \frac{dy}{dx}$

La derivada de la derivada se llama segunda derivada y se denota con $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

El proceso de hallar derivadas, una tras otra, se llama derivadas sucesivas.

La enésima derivada de una función se denota con $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 43

Encuentra la segunda derivada $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ de la función $y = \cos^3 x$

Solución

Se obtiene la primera derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos^3 x}{dx} = -3\cos^2 x \operatorname{sen} x$$

Finalmente, se deriva el resultado anterior para obtener la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3\cos^2 x \operatorname{sen} x) = -3\cos^3 x + 6\operatorname{sen}^2 x \cos x$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 44

Determina $\frac{d^3y}{dx^3}$ de la función $y = \ln x$

Solución

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Se encuentran la segunda y tercera derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

Finalmente, el resultado es: $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 45

Encuentra $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$

Solución

Se deriva sucesivamente la función, hasta llegar a la cuarta derivada:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x \qquad f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \qquad f''(x) = 6x + 4$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^4(x) = 0$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 46

¿Cuál es el resultado de $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - 3xy + y = 1$?

Solución

Se obtiene la primera derivada implícita: $\frac{d}{dx}(x^2 - 3xy + y) = \frac{d}{dx}(1) \rightarrow 2x - 3\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + \frac{dy}{dx} = 0$

$$2x - 3x\frac{dy}{dx} - 3y + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - 3x) = 3y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2x}{1 - 3x}$$

La segunda derivada es: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y - 2x}{1 - 3x}\right) \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-3x)\left(3\frac{dy}{dx} - 2\right) - (3y - 2x)(-3)}{(1-3x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-3x)\left[3\left(\frac{3y-2x}{1-3x}\right) - 2\right] - (3y-2x)(-3)}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(3y-2x) - 2(1-3x) - (3y-2x)(-3)}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y - 6x - 2 + 6x + 9y - 6x}{(1-3x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18y - 6x - 2}{(1-3x)^2}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 47

Determina $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ de $x^2 - xy + y^2 = 2$

Solución

Se obtiene la primera derivada:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(2) \quad \rightarrow \quad 2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

Se obtiene la segunda derivada: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y-2x}{2y-x}\right) \quad \rightarrow \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(2y-x)\left(\dfrac{dy}{dx} - 2\right) - (y-2x)\left(2\dfrac{dy}{dx} - 1\right)}{(2y-x)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y-x)\left(\dfrac{-3y}{2y-x}\right) - (y-2x)\left(\dfrac{-3x}{2y-x}\right)}{(2y-x)^2}$$

al simplificar se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(2y-x)^3}$$

pero $x^2 - xy + y^2 = 2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(2)}{(2y-x)^3} = -\frac{12}{(2y-x)^3}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

DERIVADAS DE ECUACIONES POLARES

Sea $\rho = f(\theta)$ una función en coordenadas polares. La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $P(r, \theta)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

DERIVADA DE ECUACIONES PARAMÉTRICAS

La curva $y = f(x)$ se define por las ecuaciones paramétricas $x = h(t)$ y $y = g(t)$; entonces, la pendiente de la recta tangente en un punto $P(x, y)$ es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}g(t)}{\frac{d}{dt}h(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ con } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 48

Calcula $\frac{dy}{dx}$ para la función cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2 + 3t$, $y = \frac{1}{t+1}$

Solución

Se determinan las derivadas respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 3; \ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

Por el teorema:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{(t+1)^2}}{2t+3} = -\frac{1}{(2t+3)(t+1)^2}$$

EJERCICIO 49

Determina la pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) a la curva, si sus ecuaciones paramétricas son $x = t - 2$, $y = \frac{1}{8}t^2 + 1$ en el intervalo $-3 \leq t \leq 3$, para el punto correspondiente a $t = 2$

Solución

Para aplicar el teorema se obtienen las derivadas: $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8}(t^2)+1\right] = \frac{1}{8}(2t) = \frac{2t}{8} = \frac{t}{4} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t-2) = 1$$

Al sustituir los resultados, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t}{4}}{1} = \frac{t}{4}$$

Se evalúa la derivada en $t = 2$, para obtener el valor de la pendiente:

$$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

GRACIAS

FACULTAD DE
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN
FCA