UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO
EDUCO EN LA VERDAD Y EN EL HONOR

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO
FACULTAD DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

FCA

DEFINICIÓN

La suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

se representa con el símbolo sigma Σ, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

EJERCICIO 1

Determina $\sum_{i=1}^{5} i^2$

Solución

Se sustituye *i* por los valores de 1 a 5, se eleva cada uno de ellos al cuadrado y se suman los resultados:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

De manera que, $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 55$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

PROPIEDADES

1. $\sum_{i=a}^{n} k = (n-a+1)k$

2. $\sum_{i=a}^{n} [f(i)+g(i)] = \sum_{i=a}^{n} f(i) + \sum_{i=a}^{n} g(i)$

3. $\sum_{i=a}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=a}^{n} f(i)$

4. $\sum_{i=1}^{n} [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 2

Calcula el valor de $\sum_{n=0}^{5}\left(2n^{3}-\frac{2}{3}n+7\right)$

Solución

Al aplicar las propiedades de las sumas, se determina:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^{3}-\frac{2}{3}n+7\right)=\sum_{n=0}^{5}2n^{3}-\sum_{n=0}^{5}\frac{2}{3}n+\sum_{n=0}^{5}7=2\sum_{n=0}^{5}n^{3}-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n+\sum_{n=0}^{5}7$$

Se desarrollan las sumas,

$$2\sum_{n=0}^{5}n^{3}=2[(0)^3+(1)^3+(2)^3+(3)^3+(4)^3+(5)^3]=450;$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n=-\frac{2}{3}(0+1+2+3+4+5)=-\frac{2}{3}(15)=-10;$$

$$\sum_{n=0}^{5}7=7(5-0+1)=7(6)=42$$

Por tanto, se precisa que:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^{3}-\frac{2}{3}n+7\right)=450-10+42=482$$

EJERCICIO 3

Determina el valor de $\sum_{i=6}^{8}(3ai^2 + 12bi - 3c)$

Solución

Al aplicar las propiedades de las sumas se encuentra que:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2 + 12bi - 3c) = \sum_{i=6}^{8}3ai^2 + \sum_{i=6}^{8}12b\,i - \sum_{i=6}^{8}3c = 3a\sum_{i=6}^{8}i^2 + 12b\sum_{i=6}^{8}i - \sum_{i=6}^{8}3c$$

Se desarrollan las sumas,

$$3a\sum_{i=6}^{8}i^2 = (3a)[(6)^2 + (7)^2 + (8)^2] = (3a)(149) = 447a;$$

$$12b\sum_{i=6}^{8}i = (12b)(6 + 7 + 8) = (12b)(21) = 252b; \quad \sum_{i=6}^{8}3c = (3c)(8 - 6 + 1) = (3c)(3) = 9c$$

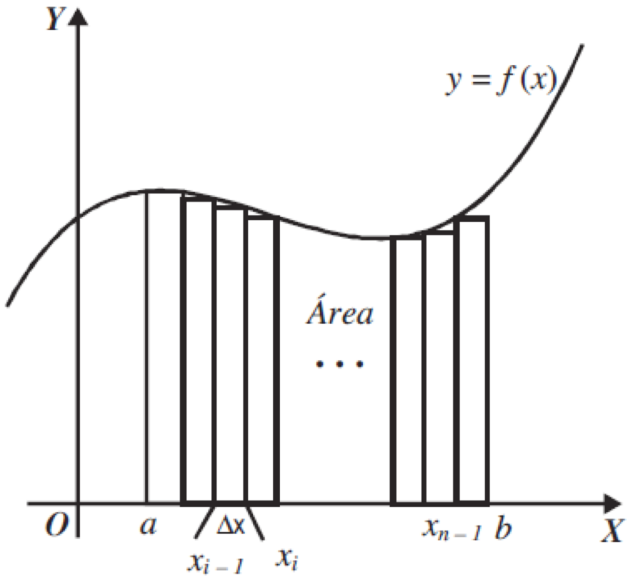
Finalmente el resultado es:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2 + 12bi - 3c) = 447a + 252b - 9c$$

Suma de Riemann (rectángulos inscritos y circunscritos)

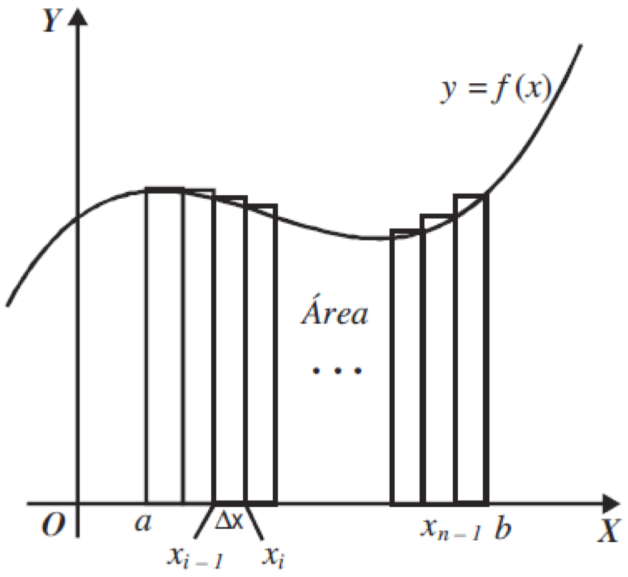
Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$ el área A bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo dado, se obtiene realizando estimaciones con rectángulos inscritos o circunscritos como se ilustra.

Rectángulos inscritos
sumas inferiores



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + (i - 1)\Delta x)$$

Rectángulos circunscritos
sumas superiores



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

SUMAS BÁSICAS

1. $$\sum_{i=1}^{n} k = kn$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

4. $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

5. $$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 4

Encuentra el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + 2$ y el eje x en el intervalo $[1, 4]$. Utiliza sumas superiores.

Solución

Gráfica

Se sustituye en la fórmula $A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + i\Delta x)$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(a + i\Delta x) = f\left(1 + \frac{3i}{n}\right) = \left(1 + \frac{3i}{n}\right)^2 + 2$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + \frac{6i}{n} + 3$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

CONTINUANDO EJERCICIO 4

Por consiguiente,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\frac{9i^2}{n^2}+\frac{6i}{n}+3\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27i^2}{n^3}+\frac{18i}{n^2}+\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{27i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{18}{n^2}\cdot\frac{n^2+n}{2}+\frac{9}{n}\cdot n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(27+\frac{45}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right) = 27u^2$$

Finalmente, el área es $A = 27u^2$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 5

Aplica sumas inferiores para encontrar el área limitada por la curva $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x en el intervalo $[1, 4]$

Solución

Se aplica la fórmula

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + (i-1)\Delta x)$$

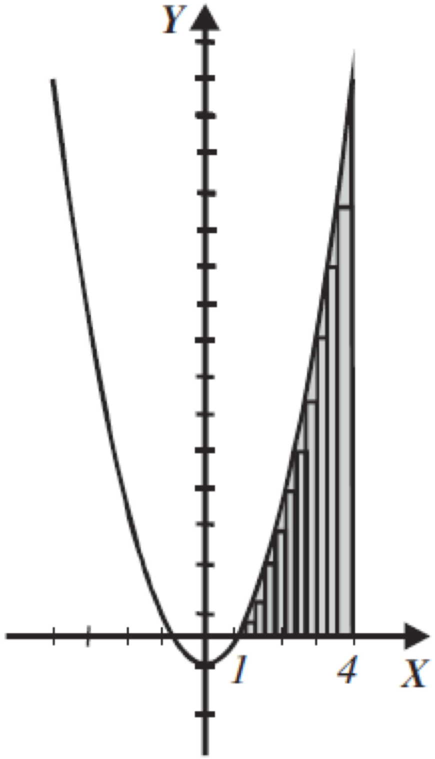
Donde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + (i-1)\Delta x = 1 + (i-1)\frac{3}{n} = \frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1$$

$$f(a + (i-1)\Delta x) = f\left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right) = \left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right)^2 - 1$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + i\left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right) + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}$$



CONTINUANDO EJERCICIO 5

Al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{9}{n^2}i^2+\left(\frac{6}{n}-\frac{18}{n^2}\right)i+\frac{9}{n^2}-\frac{6}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3}i^2+\left(\frac{18}{n^2}-\frac{54}{n^3}\right)i+\frac{27}{n^3}-\frac{18}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{27}{n^3}i^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18}{n^2}-\frac{54}{n^3}\right)i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3}-\frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\left(\frac{18}{n^2}-\frac{54}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}i+\left(\frac{27}{n^3}-\frac{18}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\left(\frac{18}{n^2}-\frac{54}{n^3}\right)\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+n\left(\frac{27}{n^3}-\frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9+\frac{27}{2n}+\frac{9}{2n^2}+9+\frac{9}{n}-\frac{27}{n}-\frac{27}{n^2}+\frac{27}{n^2}-\frac{18}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[18-\frac{45}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right] = 18u^2$$

Por tanto, $A = 18u^2$

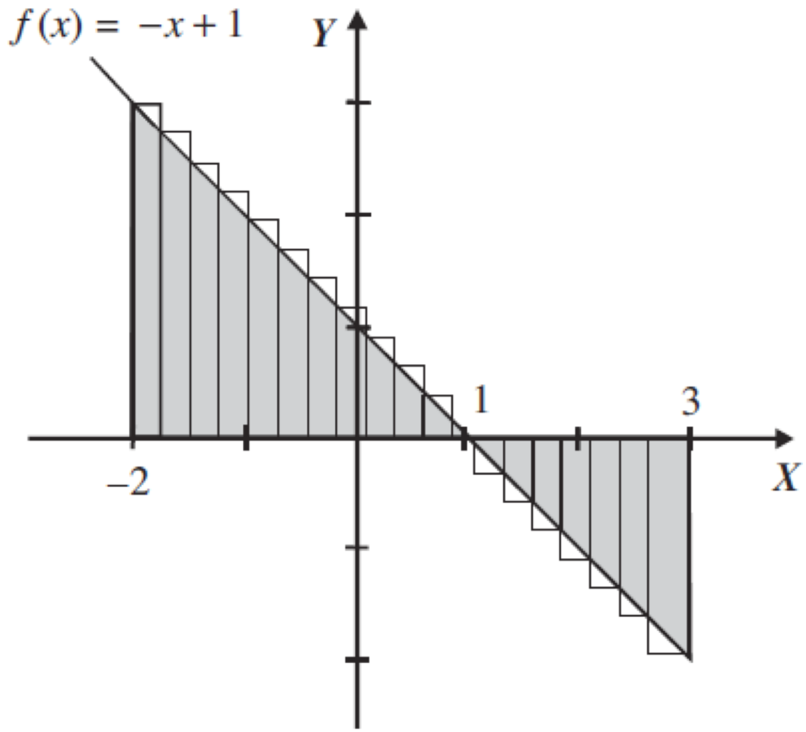
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 6

Determina el área limitada por la recta $f(x) = -x + 1$ y el eje X, mediante sumas superiores en el intervalo $[-2, 3]$

Solución

Al analizar la gráfica, se consideran 2 intervalos $[-2, 1]$ y $[1, 3]$.



FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

CONTINUANDO EJERCICIO 6

Cálculo del área de $[-2, 1]$

Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{3}{n}$

$$f(a + i\Delta x) = -\left(-2 + \frac{3i}{n}\right) + 1 = -\frac{3i}{n} + 3$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{n}\right)\left(-\frac{3i}{n} + 3\right) = \frac{9}{2}u^2$$

Se realiza el cálculo del área de $[1, 3]$,

Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + i\Delta x)$$

CONTINUANDO EJERCICIO 6

Donde $\Delta x = \dfrac{2}{n}$

$$f(a + i\,\Delta x) = -\left(1 + \frac{2i}{n}\right) + 1 = -\frac{2i}{n}$$

Se sustituye en la fórmula y se tiene como resultado:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2i}{n}\right) = -2u^2$$

El signo negativo indica que el área se encuentra por debajo del eje x, pero para efectos del cálculo del área total, se considera su valor absoluto.

Por tanto, el área buscada es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{9}{2}u^2 + 2u^2 = \frac{13}{2}u^2$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

INTEGRALES INMEDIATAS

DEFINICIÓN

Si $F(x)$ es una función con derivada $f'(x)$ entonces, $F(x)$ se llama *integral indefinida* o *antiderivada de* $f'(x)$.

La antiderivada de una función no es única.

EJEMPLO

$$x^3, x^3 + 4, x^3 - 1$$

Son todas antiderivadas de $f'(x) = 3x^2$, puesto que todas las antiderivadas de $f'(x)$ quedan incluidas en $F(x) = x^3 + C$, en donde C se llama constante de integración.

Para denotar la integral indefinida de $f'(x)$ se utiliza:

$$\int f'(x)dx$$

Entonces,

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

FÓRMULAS

1. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$

2. $\int a\, dv = a \int dv$

3. $\int dx = x + C$

4. $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\,,\, n \neq -1$

5. $\int v^n\, dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1} + C\,,\, n \neq -1$

6. $\int \dfrac{dv}{v} = \ln|v| + C$

7. $\int a^v\, dv = \dfrac{a^v}{\ln a} + C$

8. $\int e^v\, dv = e^v + C$

9. $\int \operatorname{sen} v\, dv = -\cos v + C$

10. $\int \cos v\, dv = \operatorname{sen} v + C$

11. $\int \sec^2 v\, dv = \tan v + C$

12. $\int \csc^2 v\, dv = -\cot v + C$

13. $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + C$

14. $\int \csc v \cot v\, dv = -\csc v + C$

15. $\int \tan v\, dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$

16. $\int \cot v\, dv = \ln|\operatorname{sen} v| + C$

17. $\int \sec v\, dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$

18. $\int \csc v\, dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 1

Encuentra $\int 3ab^2x^4dx$

Solución

$$\int 3ab^2x^4\ dx = 3ab^2\int x^4\ dx = 3ab^2\,\frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{3ab^2x^5}{5} + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 2

¿Cuál es el resultado de $\int (5x^3 + 2x^2 - 6x + 3)dx$?

Solución

$$\int (5x^3 + 2x^2 - 6x + 3)dx = 5\int x^3 dx + 2\int x^2 dx - 6\int x\, dx + 3\int dx$$

$$= 5\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\frac{x^{2+1}}{2+1} - 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + C$$

$$= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 3x + C$$

$$= \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 3

Obtén $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

EJERCICIO 4

¿Cuál es el resultado de $\int -\frac{3\,dx}{x^3}$?

Solución

$$\int -\frac{3\,dx}{x^3} = -3\int \frac{dx}{x^3} = -3\int x^{-3}dx = -3\,\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{-3x^{-2}}{-2} + C = \frac{3}{2x^2} + C$$

EJERCICIO 5

Realiza la siguiente integral:

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}} x\,dx$$

Solución

Se elige, de la siguiente forma, la nueva variable que se va a integrar:

$$v = 2 + x^2 \qquad \rightarrow \qquad dv = 2x\,dx$$

Se realizan las sustituciones y se resuelve la integral para obtener el resultado.

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}} x\,dx = \int (2+x^2)^{\frac{3}{2}}(2x)dx = \int v^{\frac{3}{2}} dv = \frac{v^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{v^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

Por consiguiente,

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}} x\,dx = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 6

Determina el resultado de $\int \sqrt{m+nx}\, dx$

Solución

$v = m + nx,\ dv = ndx$ donde $dx = \dfrac{dv}{n}$

Al realizar las sustituciones se genera la integral:

$$\int \sqrt{m+nx}\, dx = \int (m+nx)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{n}\int v^{\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3n} + C = \frac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n} + C$$

Finalmente, $\int \sqrt{m+nx}\, dx = \dfrac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n} + C$

EJERCICIO 7

Encuentra el resultado de $\int x(2+x^3)^2 dx$

Solución

$v = 2 + x^3$, $dv = 3x^2 dx$ donde $dx = \dfrac{dv}{3x^2}$

$$\int x(2+x^3)^2 dx = \int x \cdot v^2 \frac{dv}{3x^2} = \int v^2 \frac{dv}{3x}$$

En este ejemplo el cambio de variable no se puede efectuar debido a que la nueva integral tiene dos variables. Entonces, se realiza el producto indicado y se resuelve la integral.

$$\int x(2+x^3)^2 dx = \int (4+4x^3+x^6)x\,dx = \int (4x+4x^4+x^7)dx = 2x^2 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^8}{8} + C$$

Por consiguiente,

$$\int x(2+x^3)^2 dx = 2x^2 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^8}{8} + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 8

Precisa la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{2+3x}$$

Solución

$v = 2 + 3x,\ dv = 3dx$ donde $\dfrac{dv}{3} = dx$

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\ln|v| + C = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

EJERCICIO 9

Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{\theta} d\theta}{c + ae^{\theta}}$$

Solución

$v = c + ae^{\theta}, \quad dv = ae^{\theta} d\theta$ donde, $\dfrac{dv}{a} = e^{\theta} d\theta$

$$\int \frac{e^{\theta} d\theta}{c + ae^{\theta}} = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{a} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{a} \ln|v| + C = \frac{1}{a} \ln|c + ae^{\theta}| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{e^{\theta} d\theta}{c + ae^{\theta}} = \frac{1}{a} \ln|c + ae^{\theta}| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 10

Encuentra la primitiva de

$$\int \frac{\text{sen } 5x}{1-\cos 5x}\, dx$$

Solución

$v = 1 - \cos 5x, \quad dv = 5 \text{ sen } 5x\, dx$ donde $\frac{dv}{5} = \text{sen } 5x\, dx$

Se realiza la sustitución:

$$\int \frac{\text{sen } 5x}{1-\cos 5x}\, dx = \int \frac{1}{5} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{5} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{5} \ln|v| + C = \frac{1}{5} \ln|1-\cos 5x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{\text{sen } 5x\, dx}{1-\cos 5x} = \frac{1}{5} \ln|1-\cos 5x| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

INTEGRALES DE FUNCIONES EXPONENCIALES

Las siguientes fórmulas se emplean para integrar funciones exponenciales

$$\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + C \quad \text{y} \quad \int e^v dv = e^v + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 11

Encuentra la integral indefinida de $\int e^{2x}dx$

Solución

Se escoge la variable de acuerdo con la fórmula que se va a emplear, en este caso,

$$v = 2x, \quad \text{su diferencial} \quad dv = 2dx \quad \text{donde,} \quad dx = \frac{dv}{2}$$

Se realiza el cambio de variable y el resultado es,

$$\int e^{2x}dx = \int e^{v}\frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int e^{v}dv = \frac{1}{2}e^{v} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Finalmente,

$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 12

Determina el resultado de $\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$

Solución

$$v = \frac{x}{3}, \quad dv = \frac{1}{3}\,dx \quad \text{donde,} \quad 3dv = dx$$

Por consiguiente, al realizar la sustitución se obtiene:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\,dx = 3\int e^{v}\,dv = 3e^{v} + C \; = \; 3e^{\frac{x}{3}} + C$$

EJERCICIO 13

Obtén la función primitiva de $\int a^{nx}dx$

Solución

$v = nx,\ dv = n\ dx$ donde, $\dfrac{dv}{n} = dx$

Se realiza la sustitución,

$$\int a^{nx}dx = \frac{1}{n}\int a^{v}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{a^{v}}{\ln a} + C = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

Por tanto,

$$\int a^{nx}dx = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 14

Encuentra el resultado de $\int \frac{dx}{e^{2x}}$

Solución

$v = -2x,\ dv = -2dx$ donde, $\frac{dv}{-2} = dx$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}} = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{v}dv = -\frac{1}{2}e^{v} + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C = \frac{1}{2e^{2x}} + C$$

INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas se integran con las siguientes fórmulas y en algunos casos auxiliándose de un cambio de variable.

1. $\int \operatorname{sen} v \, dv = -\cos v + C$
2. $\int \cos v \, dv = \operatorname{sen} v + C$
3. $\int \sec^2 v \, dv = \tan v + C$
4. $\int \csc^2 v \, dv = -\cot v + C$
5. $\int \sec v \tan v \, dv = \sec v + C$
6. $\int \csc v \cot v \, dv = -\csc v + C$
7. $\int \tan v \, dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$
8. $\int \cot v \, dv = \ln|\operatorname{sen} v| + C$
9. $\int \sec v \, dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$
10. $\int \csc v \, dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 15

Obtén el resultado de $\int \cos my\, dy$

Solución

Se hace un cambio de variable y se obtiene su diferencial:

$$v = my, \quad dv = mdy, \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{m} = dy$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int \cos my\, dy = \int \cos v \frac{dv}{m} = \frac{1}{m}\int \cos v\, dv = \frac{1}{m}\operatorname{sen} v + C = \frac{1}{m}\operatorname{sen} my + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 16

¿Cuál es el resultado de $\int \sec 7x\, dx$?

Solución

$v = 7x, \quad dv = 7dx \quad \text{donde,} \quad \dfrac{dv}{7} = dx$

$$\int \sec 7x\, dx = \frac{1}{7}\int \sec v\, dv = \frac{1}{7}\ln\left|\sec v + \tan v\right| + C = \frac{1}{7}\ln\left|\sec 7x + \tan 7x\right| + C$$

EJERCICIO 17

Obtén el resultado de $\int x \cot x^2 dx$

Solución

$v = x^2, \quad dv = 2x\,dx \quad$ donde, $\quad \dfrac{dv}{2} = x\,dx$

Se realiza el cambio de variable y se resuelve la integral:

$$\int x \cot x^2 dx = \int \cot v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int \cot v\, dv = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} v| + C = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x^2| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 18

Encuentra el resultado de $\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Solución

La fórmula que se va a utilizar es $\int \tan v\, dv = \ln|\sec v| + C$, de manera que:

$$v = \sqrt{x}, \quad dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{donde,} \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dv$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral:

$$\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \tan v\, dv = 2\ln|\sec v| + C = 2\ln|\sec \sqrt{x}| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 19

Determina $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx$

Solución

Antes de resolver esta integral se recomienda emplear identidades trigonométricas.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x}{\cos x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)} = \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$$

$$= \tan 2x$$

Al sustituir la identidad encontrada, se tiene $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx = \int \tan 2x\,dx$, donde:

$$v = 2x, \quad dv = 2dx; \quad dx = \frac{dv}{2}$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\,dx = \int \tan 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \tan v\,dv = -\frac{1}{2}\ln|\cos v| + C = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

INTEGRALES CON EXPRESIONES DE LA FORMA

$$\sqrt{v^2 \pm a^2}, \sqrt{a^2 - v^2}, v^2 \pm a^2, a^2 - v^2$$

Fórmulas

1. $\displaystyle\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{arc tan} \frac{v}{a} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v-a}{v+a} \right| + C$

3. $\displaystyle\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+v}{a-v} \right| + C$

4. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \text{arc sen} \frac{v}{a} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

6. $\displaystyle\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{arc sec} \frac{v}{a} + C$

7. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sen} \frac{v}{a} + C$

8. $\displaystyle\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 20

Determina el resultado de $\int \frac{dx}{x^2+36}$

Solución

Se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a} + C$$

se deducen las siguientes equivalencias y se sustituyen en la fórmula.

$$v^2 = x^2,\ v = x \text{ y } dv = dx;\ a^2 = 36,\ a = 6$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2+36} = \frac{1}{6}\text{arc tan}\frac{x}{6} + C$$

EJERCICIO 21

Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{16x^2 - 9}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v-a}{v+a} \right| + C$$

se determina la variable y se encuentra su diferencial,

$$v^2 = 16x^2,\ v = 4x,\ dv = 4dx \quad \text{y} \quad \frac{dv}{4} = dx;\ a^2 = 9,\ a = 3$$

Finalmente, se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{16x^2 - 9} = \frac{1}{4} \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2(3)} \ln \left| \frac{4x-3}{4x+3} \right| + C = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{4x-3}{4x+3} \right| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 22

Obtén el resultado de $\int \frac{m}{n^2x^2 - p^2}\,dx$

Solución

$$a^2 = p^2,\; a = p \quad v^2 = n^2x^2;\; v = nx, dv = ndx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{n} = dx$$

Se sustituye y se resuelve la integral,

$$\int \frac{mdx}{n^2x^2 - p^2} = \frac{m}{n}\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2(p)}\ln\left|\frac{nx - p}{nx + p}\right| + C = \frac{m}{2np}\ln\left|\frac{nx - p}{nx + p}\right| + C$$

Se concluye que,

$$\int \frac{mdx}{n^2x^2 - p^2} = \frac{m}{2np}\ln\left|\frac{nx - p}{nx + p}\right| + C$$

EJERCICIO 23

Precisa el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C$$

se deduce a, v y la diferencial dv

$$a^2 = 9,\ a = 3;\ v^2 = 25x^2,\ v = 5x,\ dv = 5\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{5} = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\frac{v}{a} + C = \frac{1}{5}\text{arc sen}\frac{5x}{3} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\frac{5x}{3} + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 24

Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}}$

Solución

$a^2 = 5,\ a = \sqrt{5}\ ;\ v^2 = 9x^2,\ \ v = 3x,\ dv = 3\ dx$ donde, $\frac{dv}{3} = dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}} = \int \frac{\frac{dv}{3}}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+5}\right| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

Integrales en las que se completa un trinomio cuadrado perfecto

En aquellas integrales con un denominador de la forma $ax^2 + bx + c$, se utiliza el método de completar un trinomio cuadrado perfecto para llegar a las formas:

$$\sqrt{v^2 \pm a^2},\ \sqrt{a^2 - v^2},\ v^2 \pm a^2, a^2 - v^2$$

Según sea el caso.

EJERCICIO 25

Encuentra el resultado de $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$

Solución

Se completa el TCP, entonces, el denominador se expresa como:

$$x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1$$

Donde,

$$v^2 = (x + 2)^2, v = x + 2, dv = dx; a^2 = 1, a = 1$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 - 1} = \frac{1}{2(1)} \ln \left| \frac{x + 2 - 1}{x + 2 + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 3} \right| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 26

Determina el resultado de $\int \frac{3dx}{x^2 - 8x + 25}$

Solución

La expresión

$$x^2 - 8x + 25 = (x^2 - 8x + 16) - 16 + 25 = (x - 4)^2 + 9$$

Donde,

$$v^2 = (x - 4)^2,\ v = x - 4,\ dv = dx;\ a^2 = 9,\ a = 3$$

Finalmente,

$$\int \frac{3dx}{x^2 - 8x + 25} = 3\int \frac{dx}{(x-4)^2 + 9} = 3 \cdot \frac{1}{3} \text{arc tan} \frac{x-4}{3} + C = \text{arc tan}\left(\frac{x-4}{3}\right) + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 27

Encuentra el resultado de la integral indefinida $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

Solución

Se completa el TCP y el trinomio se convierte a la expresión equivalente.

$$2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

Se utiliza la fórmula,

$$\int\frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{arc }\tan\frac{v}{a}+C$$

se obtiene la variable, su diferencial y el valor de a, entonces,

$$v^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\ v=x-\frac{1}{2},\ dv=dx;\ a^2=\frac{1}{4},\ a=\frac{1}{2}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

CONTINUANDO EJERCICIO 27

Se realizan los cambios y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C = \operatorname{arc\,tan}\frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{1}{2}}+C$$

Por tanto, el resultado de la integral es:

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1} = \operatorname{arc\,tan}(2x-1)+C$$

EJERCICIO 28

Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

Solución

La expresión

$$2-3x-4x^2=-4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)=-4\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-4\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right]=4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]$$

Se deduce entonces la fórmula que se va a utilizar:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=\text{arc sen}\frac{v}{a}+C$$

Donde,

$$v^2=\left(x+\frac{3}{8}\right)^2 \quad v=x+\frac{3}{8}\text{, } dv=dx;\ a^2=\frac{41}{64},\ a=\frac{\sqrt{41}}{8}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

CONTINUANDO EJERCICIO 28

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \text{arc sen}\,\frac{x+\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C = \frac{1}{2}\cdot \text{arc sen}\,\frac{\frac{8x+3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C = \frac{1}{2}\text{arc sen}\,\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

EJERCICIO 29

Encuentra el resultado de $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5}$

Solución

En este caso, la expresión se representa como:

$$\frac{2x+5}{x^2+2x+5} = \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{3}{x^2+2x+5}$$

Se ha elegido esta separación debido a que,

$$\text{si } v = x^2+2x+5 \text{ entonces } dv - (2x+2)dx$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Para la integral $\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el cambio,

$$v = x^2+2x+5\,,\ dv = (2x+2)dx \text{ y } \frac{dv}{(2x+2)} = dx$$

CONTINUANDO EJERCICIO 29

Resultando:

$$\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + C$$

Ahora, con la integral $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el siguiente cambio:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arc\tan\frac{x+1}{2} + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

CONTINUANDO EJERCICIO 29

Finalmente, al sustituir se obtiene:

$$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + 3 \cdot \frac{1}{2} \text{arc tan} \frac{x+1}{2} + C$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2} \text{arc tan} \frac{x+1}{2} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2} \text{arc tan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

EJERCICIO 30

Obtén el resultado de $\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}\,dx}{\sqrt{e^{3x} + 6e^{2x} + 5e^{x}}}$

Solución

La integral se expresa de la siguiente manera:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}\,dx}{\sqrt{e^{3x} + 6e^{2x} + 5e^{x}}} = \int \frac{\sqrt{e^{x}}(e^{2x} + 4e^{x})dx}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{e^{2x} + 6e^{x} + 5}} = \int \frac{(e^{2x} + 4e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x} + 6e^{x} + 5}}$$

Se realiza la separación en el numerador

$$\int \frac{(e^{2x} + 4e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x} + 6e^{x} + 5}} = \int \frac{(e^{2x} + 3e^{x} + e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x} + 6e^{x} + 5}} = \int \frac{(e^{2x} + 3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x} + 6e^{x} + 5}} + \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x} + 6e^{x} + 5}}$$

CONTINUANDO EJERCICIO 30

Ahora, para la integral $\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se realiza el siguiente cambio:

$$v = e^{2x} + 6e^{x} + 5,\ dv = (2e^{2x} + 6e^{x})dx = 2(e^{2x} + 3e^{x})dx$$

Entonces,

$$\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}$$

Por consiguiente, para la integral $\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se completa el trinomio cuadrado perfecto y se realiza el cambio de variable.

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-9+5}} = \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-4}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}}$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN FCA

CONTINUANDO EJERCICIO 30

Donde,

$$w = e^x + 3, dw = e^x dx$$

Entonces,

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x+3)^2-4}} = \int \frac{dw}{\sqrt{w^2-4}} = \ln\left|w+\sqrt{w^2-4}\right| = \ln\left|e^x+3+\sqrt{(e^x+3)^2-4}\right|$$

$$= \ln\left|e^x+3+\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}\right|$$

Por tanto, se concluye que:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}}+4\sqrt{e^{3x}}dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^x}} = \sqrt{e^{2x}+6e^x+5} + \ln\left|e^x+3+\sqrt{e^{2x}+6e^x+5}\right| + C$$

FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

GRACIAS

FACULTAD DE
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN
FCA